

“

# MATEMATİK

ALANINDA ULUSLARARASI ARAŞTIRMA VE DEĞERLENDİRMELER

*Aralık 2024*

EDİTÖR

PROF. DR. GÜNAY ÖZTÜRK

”

**Genel Yayın Yönetmeni / Editor in Chief** • C. Cansın Selin Temana

**Kapak & İç Tasarım / Cover & Interior Design** • Serüven Yayınevi

**Birinci Basım / First Edition** • © Aralık 2024

**ISBN** • 978-625-6172-93-7

**© copyright**

Bu kitabın yayın hakkı Serüven Yayınevi'ne aittir.

Kaynak gösterilmeden alıntı yapılamaz, izin almadan hiçbir yolla çoğaltılamaz.

The right to publish this book belongs to Serüven Publishing. Citation can not be shown without the source, reproduced in any way without permission.

**Serüven Yayınevi / Serüven Publishing**

**Türkiye Adres / Turkey Address:** Kızılay Mah. Fevzi Çakmak 1. Sokak

Ümit Apt No: 22/A Çankaya/ANKARA

**Telefon / Phone:** 05437675765

**web:** www.seruvenyayinevi.com

**e-mail:** seruvenyayinevi@gmail.com

**Baskı & Cilt / Printing & Volume**

Sertifika / Certificate No: 47083

# MATEMATİK

Alanında Uluslararası Araştırma ve Değerlendirmeler

ARALIK 2024

EDİTÖR

PROF. DR. GÜNAY ÖZTÜRK



# İÇİNDEKİLER

## BÖLÜM 1

BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ VE GENİŞLETİLMİŞ DYM DENKLEMİ:  
GEOMETRİK YAPILAR VE SOLİTON TEORİSİ PERSPEKTİFİNDEN BİR  
İNCELEME

*Ayşe YAVUZ*..... 1

*Melek ERDOĞDU*..... 1

## BÖLÜM 2

4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZİTZEİCA EĞRİLER

*Enes ORUÇ* ..... 23

*Mehmet BEKTAŞ* ..... 23

## BÖLÜM 3

DUAL DEĞİŞKENLİ KÜRESEL BÉZIER EĞRİLERİNDE BLASHKE ÇATI\*

*Muhsin İNCESU*..... 33

*Fadime TEKGÜL* ..... 33

## BÖLÜM 4

CONFORMABLE BOUSSINESQ-DOUBLE SİN-H-GORDON  
DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

*Derya UĞUN* ..... 45

*Orkun TAŞBOZAN* ..... 45

## BÖLÜM 5

3 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİ

*İlim KİŞİ*..... 63

*Sezgin BÜYÜKKÜTÜK* ..... 63



# BÖLÜM 1

## BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİ VE GENİŞLETİLMİŞ DYM DENKLEMİ: GEOMETRİK YAPILAR VE SOLİTON TEORİSİ PERSPEKTİFİNDEN BİR İNCELEME

*Ayşe YAVUZ<sup>1</sup>*

*Melek ERDOĞDU<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Doç. Dr., Orcid: 0000-0002-0469-3786

Necmettin Erbakan Üniversitesi AKEF, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

<sup>2</sup> Doç. Dr., Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar

Bilimleri Bölümü, Orcid: 0000-0001-9610-6229

## **1. Giriş**

Bu bölümde, Bertrand eğri çiftleri ile Genişletilmiş Dym (ED) denklemi arasındaki matematiksel ilişkiler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bertrand eğri çiftleri, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik alanlarında önemli bir yer tutan, özel geometrik yüzeyler ve eğriler üzerine yapılan araştırmalarla doğrudan bağlantılıdır. ED denklemi ise, soliton teorisi ile güçlü bir ilişki içinde olup, doğrusal olmayan dalga denklemlerinin ve geometrik yapıların analizi açısından önemli bir yer teşkil etmektedir. Bu çalışmada, ED denklemlerinin geometrik yapılarının Bertrand eğri çiftleriyle nasıl etkileşime girdiğini ayrıntılı bir biçimde ele almakta, aynı zamanda yeni yüzey sınıflarının tanımlanmasını ve bu yüzeylerin fiziksel modelleme potansiyellerini tartışılmıştır.

Bölümde ayrıca, Bertrand eğri çiftlerinin ve ED yüzeylerinin teorik temelleri, soliton çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan matematiksel yöntemler ve bu geometrik yapıların fiziksel uygulamaları ele alınmıştır. ED yüzeylerinin dual yapıları ve soliton çözümleri üzerine yapılan tartışmalar, matematiksel fizik ile diferansiyel geometri arasındaki etkileşimi güçlendirerek, bu alanlarda yeni araştırma fırsatı vermektedir. Bu bağlamda, Bertrand eğri çiftlerinin ED denklemleriyle olan ilişkilerini daha derinlemesine anlamak isteyen araştırmacılar için kapsamlı bir kaynak sunulmakta ve bu alanda gelecekteki teorik ve uygulamalı çalışmalar için önemli bir temel teşkil etmektedir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, matematik, fizik, mühendislik ve biyoloji gibi birçok disiplinin teorik ve uygulamalı alanlarında merkezil bir öneme sahiptir. Bu denklemler, karmaşık sistemlerin dinamiklerini modellemek ve anlamak için güçlü bir araç olarak kabul edilir. Ancak, bu tür denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek genellikle büyük bir zorluk oluşturur. Bu zorlukların üstesinden gelmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiş olsa da, bilimsel araştırmalardaki ilerlemeler ve teknolojinin



sürekli yenilenmesi, farklı çözüm tekniklerinin ve yaklaşımlarının keşfini zorunlu kılmaktadır. Bu bağlamda, soliton çözümleri, özellikle fiziksel uygulamalardaki önemi nedeniyle dikkat çeken bir alan olarak öne çıkmaktadır.

Soliton kavramı, sabit hızda ilerlerken kendi formunu koruyan, doğrusal olmayan tekil dalgalar olarak tanımlanır. Bu kavram, ilk kez 1834 yılında İskoç mühendis J. S. Russell tarafından, su dalgalarının hareketlerini incelemek amacıyla yapılan çalışmalarda ortaya atılmıştır. Russell, suyun derinliği ve dalga derinliği ile hız arasındaki bağıntıyı şu şekilde ifade etmiştir:

$$c^2 = g(h + \alpha)$$

c dalganın hızı, g yer çekimi ivmesi, h suyun derinliği,  $\alpha$  dalganın derinliğidir (Russell,1844). Solitonların bu özellikleri, yalnızca su dalgalarında değil, aynı zamanda mıknatıslarda ve diğer fiziksel sistemlerde de gözlemlenmiştir.

Solitonların teorik temelleri, 19. yüzyılda yapılan önemli çalışmalarla zenginleşmiştir. E. Bour (1862), Gauss-Mainardi-Codazzi sistemini kullanarak sabit negatif eğrilikli yüzeyler üzerinde yaptığı çalışmalarda, doğrusal olmayan dalga yayılımı ve soliton çözümlerine sahip olan Sinüs-Gordon denklemini elde etmiştir. Daha sonra, Korteweg ve de Vries (1895), su dalgalarının davranışlarını modelleyen ve soliton dalgaların oluşumunu açıklayan Korteweg-de Vries (KdV) denklemini geliştirmiştir. Bu çalışmalar, solitonların doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler bağlamında daha geniş bir şekilde ele alınmasını sağlamıştır. Zabusky ve Kruskal (1975), çarpışma sonrası aynı hız ve formda hareketine devam eden dalgaları inceleyerek bu tür dalgaları "soliton" olarak adlandırmıştır.

Soliton teorisi, yalnızca matematik ve fizik gibi alanlarda değil, biyoloji ve mühendislikte de önemli uygulamalara sahiptir. Bunun yanı sıra, diferansiyel geometri ile olan ilişkisi, teorinin kapsamını genişleten bir başka önemli unsurdur. Bu bağlamda, Backlund dönüşümü, sabit negatif eğrilikli yüzeylerin

dönüşümleri aracılığıyla soliton çözümlerini geometrik bir açıdan inceleyen güçlü bir araçtır. Backlund dönüşümü, bir yarı küresel yüzeyi sabit uzunluklu doğrularla bağlı başka bir yarı küresel yüzeye dönüştüren bir işlem olarak tanımlanır. Bu dönüşüm, hem geometrik hem de fiziksel sistemlerde çözüm üretme açısından büyük bir öneme sahiptir. (Erdoğan, M., & Yavuz, A. (2022), Rogers ve Schief (2002))

Backlund dönüşümünün uygulama alanları arasında genişletilmiş Dym (ED), Sinüs-Gordon ve mKdV denklemleri yer alır. Rogers ve Schief (2002), Genişletilmiş Dym denklemini incelemiş ve bu denklemin doğal geometrisini analiz etmiştir. ED denkleminin önemi, fiziksel bir analize dayanmasının yanı sıra, sabit eğrilik ve sabit burulmaya sahip eğriler açısından incelendiğinde geometrik açıdan da önem taşımaktadır. ED denklemine karşılık gelen soliton yüzeylerine ED yüzeyleri adı verilmektedir.

Literatür incelendiğinde, ED denkleminin hem fiziksel ve hem de geometrik yapısını inceleyen çalışmaların oldukça sınırlı olduğu görülmektedir. Mevcut çalışmalar genellikle analitik çözümler üzerine yoğunlaşmış, bu çözümlerle ilişkilendirilen geometrik yapıların sistematik bir şekilde ele alınması göz ardı edilmiştir. Bu durum, ED yüzeylerinin geometrik değişmezleri, geodezik eğrileri ve bu yapıların diğer fiziksel sistemlerle olan ilişkileri üzerine yeni araştırmalara duyulan ihtiyacı ortaya koymaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı, Bertrand eğri çiftleri ve Genişletilmiş Dym (ED) denklemi arasındaki matematiksel ve geometrik ilişkileri derinlemesine incelemektir. Bertrand eğri çiftleri, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik alanlarında önemli bir konu olup, özel geometrik yüzeyler ve eğriler üzerinde yapılan araştırmalarla ilişkilendirilmektedir. ED denklemi ise soliton teorisi ile bağlantılı olarak, doğrusal olmayan dalga denklemleri ve geometrik yapıların analizi açısından kritik bir öneme sahiptir. Bu çalışma, ED denklemlerinin geometrik yapılarının, Bertrand eğri çiftleriyle olan etkileşimlerini detaylı bir şekilde ele almayı hedeflemektedir.

Çalışmanın hedefleri arasında, Bertrand eğri çiftlerinin ve ED denklemlerinin teorik temellerinin açıklanması ve bu iki yapının etkileşiminin incelenmesi yer almaktadır. Bunun yanı sıra, ED denklemlerinin soliton çözümleri ve fiziksel modelleme potansiyeli üzerine yapılan tartışmalarla, bu geometrik yapıların diferansiyel geometri içindeki yerinin daha iyi anlaşılması amaçlanmaktadır. Ayrıca, Bertrand eğri çiftleri ve ED yüzeylerinin yeni sınıflarının tanımlanması ve bu yüzeylerin fiziksel modelleme alanındaki potansiyelinin ortaya konması, çalışmanın diğer önemli hedeflerindedir.

### **Teorik Çerçeve**

Schief ve Rogers (1999) çalışmasında; sabit eğrilik ve sabit burulmaya sahip eğrilerin binormal hareketinin sırasıyla Dym ve klasik Sine-Gordon denklemlerinin integrallenebilir genişletilmesine yol açtığı gösterilmiştir. Genişletilmiş Dym (Extended Dym) denklemi durumunda ise verilmiş belirli bir soliton yüzeyi ile ilişkili yeni bir soliton yüzey çiftinin varlığını belirlemek için karşılıklı değişmezler kullanılmıştır. Genişletilmiş Dym ve karşılıklı olarak birbirine bağlı  $m^2KdV$  denklemi için Darboux değişmezliği ele alınmıştır. Bilinen sabit uzunluk özelliği ile bir Backlund dönüşümü ortaya atılmıştır öyle ki bu dönüşüm ile yeni soliton yüzeyleri üretmek mümkün olmuştur.

Rogers ve Schief (2002) çalışmasında da bahsedildiği gibi; Dym denkleminin genişletilmiş versiyonlarının doğal geometrik türevi ve Sine-Gordon denklemlerinin sabit eğrilik ve sabit burulmaya sahip eğrilerin binormal hareketi açısından ele alınabilir. Dym denklemi, sabit eğrilikli bir uzatılamaz (inextensible) eğrinin hareketi ile

$$\tau_t = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{\tau^{1/2}} \right)_{ss} - \tau^{3/2} + \kappa \left( \frac{1}{\tau^{1/2}} \right) \right]_s \quad (1)$$

olarak ifade edilir. Burada,  $\kappa$  eğrinin eğriliğini ve  $\tau$  ise eğrinin burulmasını temsil etmektedir. Ayrıca eğrinin hızı ise

$$v = \tau^{-1/2}B \quad (2)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca Dym denklemi

$$\tau_t = \left( \frac{1}{\tau^{1/2}} \right)_{sss} \quad (3)$$

olduğundan açıkça görülüyor ki genişletilmiş Dym denklemine göre daha basit bir geometrik yapıya sahiptir. Özel olarak (1) eşitliğinden;  $V = \tau^{-1/2}$  binormal hareketin hızı olmak üzere

$$(V^{-1})_t = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa} (V V_{ss} - \frac{1}{2} V_s^2) - \frac{3}{2} V^{-2} + \kappa \frac{V^2}{2} \right)_s \quad (4)$$

elde edilir. Genelliği kaybetmeden  $\kappa = 1$  alınırsa (1) eşitliği, aşağıdaki denklemlere karşılık gelir:

$$\tau_t = X_s \quad \text{ve} \quad X = \left( \frac{1}{\tau^{1/2}} \right)_{ss} - \tau^{3/2} + \left( \frac{1}{\tau^{1/2}} \right). \quad (5)$$

Bu durumda Serre-Frenet denklemleri ve  $\{T, N, B\}$  üçlüsünün zamana göre değişimi

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & -\tau^{1/2} & -\frac{1}{2} \frac{\tau_s}{\tau^{3/2}} \\ \tau^{1/2} & 0 & X - \frac{1}{\tau^{1/2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\tau_s}{\tau^{3/2}} & -X + \frac{1}{\tau^{1/2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (7)$$

olarak bulunur. (5) eşitliğinden

$$(\tau B)_t = (XB + \tau^{1/2}T)_s \quad (8)$$

olduğu görülür. Bu durumda  $r'$  vektör değerli fonksiyonu tanımlayabiliriz öyle ki

$$r'_s = \tau B, \quad (9)$$

$$r'_t = XB + \tau^{1/2}T \quad (10)$$

eşitlikleri sağlansın. Burada  $\{T', N', B'\}$  üçlüsü  $\{B, -N, T\}$  üçlüsüne karşılık gelir ve

$$\kappa' = 1 \quad \text{ve} \quad \tau' = \frac{1}{\tau} \quad (11)$$

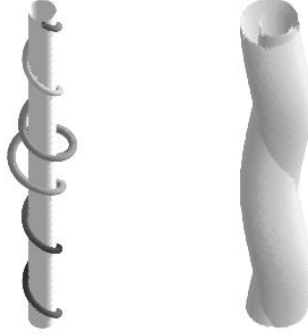
olduğu açıktır. Burada  $\mathbf{n} = -N$  olduğundan

$$r' = r - N \quad (12)$$

elde edilir. Sonuç olarak bu eşitlik,  $r$  ve  $r'$  iki ED yüzeyi olmak üzere, bu yüzeylerin paralel yüzeyler olduklarını gösterir.  $r'$  yüzeyine  $r$  ED yüzeyinin duali adı verilir. Önemli bir ayrıntı da şudur ki: bir ED yüzeyi ile dualinin geodezikleri Bertrand eğri çiftleri ailesi meydana getirir (Weatherburn, 1927). Bertrand eğrileri

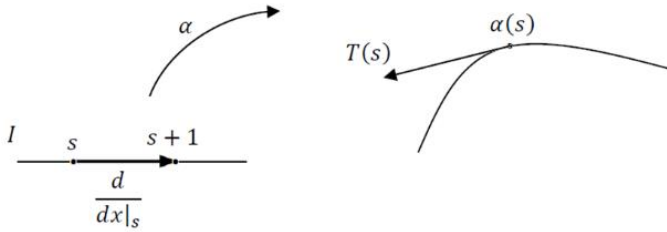
$$\alpha\kappa + \beta\tau = 1 \quad (13)$$

denklemleri ile karakterize edilir. Burada  $\alpha, \beta$  birer reel sabittir. Bertrand eğrileri offset eğrilerine bir örnek teşkil eder (Nimmo ve Schief, 1997) Offset eğrileri bilgisayar destekli tasarım (CAD) ve bilgisayar destekli üretimde (CAM) sıklıkla kullanılır. Ayrıca Razzaboni (1901) göstermiştir ki üzerinde bir parametrelili geodezik Bertrand eğrileri olan yüzeyler arasında da bir Backlund dönüşümü vardır. Dolayısıyla bu yüzeyler de soliton yüzeyleridir (Rogers ve Schief (2002)). Örneğin; ED yüzeylerinin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 1: ED Yüzeyleri

$\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için  $T(s) = \alpha'(s)$  eşitliğiyle belirli  $T(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birim teğet vektörü denir (Yüce, 2017; Chen ve Dillen, 2005).



Şekil 2: Eğrinin teğet vektör alanı

$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\kappa(s) = \|T'(s)\|$  fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği adı verilir.

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \quad (14)$$

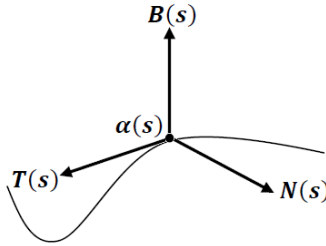
eşitliğiyle belirli  $N(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki asli normali denir.  $N$  vektör alanına,  $\alpha$  eğrisinin asli normal vektör alanı adı verilir.  $N$  vektör alanının kısaca  $N = \frac{1}{\kappa} T'$  biçiminde yazılabileceği görülebilir.

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (15)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki binormali denir.  $B$  vektör alanına,  $\alpha$  eğrisinin binormal vektör alanı adı verilir.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  kümesi pozitif yönlü bir çatıdır. Ayrıca her  $s \in I$  için

$$\|B(s)\| = \|T(s)\| \|N(s)\| \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1 \quad (16)$$

dir.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  kümesi  $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$  uzayının ortonormal bir tabanıdır (Şekil 3).



Şekil 3:  $\mathbb{R}^3$ 'de bir eğrinin Frenet vektörleri

$T(s), N(s), B(s)$  vektörlerine  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri denir.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  kümesine de  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatısı denir.  $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \quad (17)$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması denir. Birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $T(s), N(s), B(s)$  ise

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (18)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2014; Do Cormo, 1976).

### Dual ED Yüzeyleri

(1) denklemin integrali kullanılarak elde edilen her bir ED yüzeyi, (4). denklemde tanımlanan dönüşümler aracılığıyla  $r' = r - N$  pozisyon vektörü

ile ilişkili bir paralel dual ED yüzeyi ile ilişkilendirilebilir. Bu dönüşüm altında, karşılık gelen noktalar üzerindeki ED yüzeyindeki koordinat doğrularının teğet vektörleri, dual ED yüzeyinde yer değiştirir. Bir ED yüzeyindeki sabit geodezikleri ile ona karşılık gelen dual ED yüzeyindeki geodezikler bir Bertrand eğri çiftleri oluştururlar. Bertrand eğrileri  $\alpha, \beta$  sabitler olmak üzere  $\alpha\kappa + \beta\tau = 1$  denklemi ile elde edilir. Bir ED yüzeyi ve onun dauli olan ED yüzeyi aynı koordinatlar cinsinden parametrelendirilebilirler.

Dual Extended Dym (ED) yüzeyleri, soliton teorisi, diferansiyel geometri ve integrallenebilir sistemler alanında önemli bir araştırma konusu olarak dikkat çekmektedir. ED denklemi, özellikle sabit eğrilik ve burulmaya sahip eğrilerin hareketleri ile ilişkili olarak ortaya çıkmakta ve yüzeylerin geometrik yapılarının incelenmesine imkân tanımaktadır.

ED yüzeylerinin geometrik yapıları, diferansiyel geometri alanında dual yapılarla ilişkilendirilmiş dönüşümler aracılığıyla ele alınmıştır. Örneğin, yüzey üzerindeki koordinat doğrularının teğet vektörleri, dual yüzeylerde dönüşümlerle yer değiştirmekte ve geometrik değişmezler korunmaktadır (Rogers & Schief, 2002). Bu bağlamda, binormal hareketler ve integrallenebilir sistemlerin analizi, ED yüzeylerinin dual yapılarını belirlemede merkezi bir rol oynamaktadır. Cieslinski, J. L. (1995), Dym denklemine yönelik integrallenebilir ayrıklaştırma yöntemlerini ele alarak, ED yüzeylerinin genişletilmiş çözümlerine matematiksel altyapı oluşturur. Ayrık sistemlerin ED denklemlerinin dual yüzeylerine nasıl uygulanabileceğini gösterir. Grinevich, P. G., & Novikov, S. P. (1984), integrallenebilir sistemlerin, özellikle Dym denklemi gibi türevlenmiş yüzey yapılarında ele alınmaktadır. Dual yapıların geometri ile nasıl ilişkilendirildiğini açıklamaktadır. Taimanov, I. A. (1997) çalışmasında, diferansiyel geometri ile soliton teorisinin birleştiği ED yüzeyleri için önemli bir referanstır. Dual yüzeylerin geometrik dönüşümlerle ilişkisi derinlemesine incelenmiştir. Calini, A., & Ivey, T. (2021), eğrilerin hareketleri ve bu hareketlere karşılık gelen yüzey çiftlerini araştırarak ED yüzeylerinin dual dönüşümlerine temel oluşturur.



Dual ED yüzeylerinin varlığı ve özellikleri, sabit eğrilik ve burulmaya sahip eğrilerin geometrik davranışları üzerinden analiz edilmiştir. Rogers ve Schief'in (2002) çalışmalarında, binormal hareketlerin karşılıklı değişmez özelliği dual soliton yüzeylerinin geometrik ilişkilerinde temel bir unsur olarak gösterilmiştir. Bu incelemeler, hem geometrik hem de fiziksel sistemlerin modellenmesinde önemli bir araç sağlamaktadır.

Minkowski 3-uzayında yüzeylerin Razzaboni dönüşümü de ED yüzeyleriyle ilişkilidir. Erdoğan ve Özdemir (2019), Bertrand eğrilerinin binormal hareketiyle oluşturulan Razzaboni yüzeylerini incelemiş ve bu yüzeylerin geometrik özelliklerini analiz etmişlerdir. Ayrıca Minkowski 3-uzayında, ED denkleminin farklı dönüşümlerle elde edilen dual yüzeylere olan etkisini incelemiştir. Özellikle Razzaboni dönüşümü gibi dönüşümlerle dual ED yüzeylerinin üretilebileceği ortaya konmuştur (Kazaz et al., 2015). Bu dönüşümler altında, dual yüzey çiftlerinin karşılıklı noktadaki teğet vektörlerinin yer değiştirmesi önemli bir özellik olarak öne çıkmaktadır.

### **Backlund Dönüşümü ve Soliton Çözümleri**

1880'li yıllarda, L. Bianchi ve A. V. Backlund, pseudo-spherical (yarı küresel) yüzeylerin dönüşümünü incelemiş ve bu dönüşümü soliton çözümleriyle ilişkilendirmiştir (Backlund, 1880; Bianchi, 1892). Yarı küresel yüzeyler, sabit ve negatif Gauss eğriliğine sahip yüzeyler olarak tanımlanır. Backlund dönüşümü, farklı yüzeylerin birbirine dönüşümünü sağlayarak, solitonların matematiksel analizini mümkün kılmaktadır. Bu dönüşüm, soliton yüzeylerinin matematiksel yapılarını ve geometrik değişmezlerinin anlaşılmasına olanak tanımaktadır.

Backlund dönüşümünün farklı uygulamaları arasında, genişletilmiş Dym (ED), Sine-Gordon ve mKdV denklemleri yer almaktadır. Bu denklemler, soliton teorisinin farklı alanlarda kullanılmasına olanak tanımış ve pek çok matematiksel ve fiziksel probleme çözüm getirmiştir. Rogers ve Schief (2002),

bu denklemlerle elde edilen soliton yüzeylerinin geometrik analizini yapmış ve ED denklemi gibi denklemlerin geometrik türevlerini incelemiştir.

### **Genişletilmiş Dym (ED) Denklemi ve Bertrand Eğri Çiftleri: Literatürdeki Gelişim Süreci**

Genişletilmiş Dym (ED) denklemi, soliton teorisinin önemli bir parçası olup, özellikle sabit eğrilik taşıyan yüzeylerin ve soliton çözümlerinin matematiksel analizinde önemli bir yer tutmaktadır. ED denkleminin çözümüyle elde edilen yüzeyler, soliton yüzeyleri olarak tanımlanır ve bu yüzeylerin geometrik özellikleri, literatürde henüz yeterince detaylı bir şekilde incelenmemiştir. Rogers ve Schief (2002), ED denkleminin çözümüyle elde edilen yüzeylerin geometrik analizini yaparak, bu yüzeylerin sabit eğrilik ve sabit burulma taşıyan özelliklerini incelemiştir.

Literatürde, ED denkleminin geometrik yapısı üzerine yapılan çalışmalar sınırlıdır. Bununla birlikte, ED denkleminin çözümüne karşılık gelen yüzeylerin, Bertrand eğri çiftleriyle ilişkili olduğu ve her iki kavramın da sabit eğrilik ve sabit burulma taşıyan yüzeyler üzerinde benzer geometrik yapıların bulunduğu görülmektedir. Bu nedenle, ED denklemi ile elde edilen yüzeylerin Bertrand eğri çiftleri ile ilişkilendirilmesi, önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Bu kavram ilk olarak Bertrand tarafından tanımlanmış ve sabit eğrilik ve sabit burulma taşıyan yüzeylerin geometrik analizinde kullanılmıştır. Bertrand eğrileri, özellikle geodezikler ve minimal yüzeylerin analizi gibi konularda uygulama alanı bulmuştur (Gray, 1998; Struik, 1988). Bertrand eğrilerinin temel özelliği, belirli geometrik koşullar altında, yüzeyler üzerinde sabit eğriliğe sahip eğriler arasında özel bir ilişkiyi ifade etmesidir. Bu eğriler, sabit eğrilik ve burulma koşullarını taşıyan yüzeylerin dinamik analizlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Bertrand eğrilerinin sabit eğrilik ve burulma koşulları, ED denklemi ile elde edilen yüzeylerin geometrik özellikleriyle örtüşmektedir. Bertrand eğri çiftleri, özellikle geodezik eğriler ve

minimal yüzeylerle olan ilişkileri nedeniyle, ED denklemi ile elde edilen soliton yüzeylerinin incelenmesinde önemli bir araç olarak kullanılabilir. Bu iki matematiksel yapının birbirini tamamlayıcı özellikleri, solitonların geometri ile olan ilişkisini daha derinlemesine incelenmesini sağlamaktadır.

Abbena, E., Salamon, S., & Gray, A. (2017), Bertrand eğrilerinin sabit eğrilik ve burulma ilişkisi üzerine yaptığı çalışmasında, bu eğrilerin diferansiyel geometri bağlamındaki önemini vurgulamıştır. Struik (1988) ise bu eğrilerin minimal yüzeylerin ve geodeziklerin incelemelerinde nasıl kullanıldığını detaylandırmıştır. Bertrand eğrileri, özellikle geodezik eğriler ve minimal yüzeylerle olan ilişkileri nedeniyle, fiziksel ve geometrik problemlerinin çözümünde önemli bir araç haline gelmiştir.

Kobayashi ve Nomizu (1963), Bertrand eğri çiftlerinin diferansiyel geometri bağlamındaki anlamını ele alan bu çalışma, özellikle sabit eğrilik taşıyan yüzeylerdeki geodeziklerin matematiksel olarak nasıl temsil edilebileceğini tartışmaktadır. Kobayashi ve Nomizu, Bertrand eğri çiftlerinin temel geometrik özelliklerini daha teorik bir perspektiften ele almışlardır.

Rogers ve Schief'in (2002) çalışmaları, soliton teorisinin ve Bertrand eğri çiftlerinin geometrik yapıları arasındaki ilişkiyi ele almıştır. Bertrand eğri çiftlerinin soliton teorisindeki rolünü açıklayan bu çalışma, soliton çözümleri ve sabit eğrilik taşıyan yüzeylerdeki Bertrand eğrileri arasındaki bağlantıları incelemektedir.

Şenyurt S, Çakır O. (2023), Bertrand eğri çiftlerinin karakterizasyonu üzerine yeni Frenet formülleri geliştirilmiştir. Yazarlar, eğrilerin özelliklerinden faydalanarak, Bertrand çifti eğrisinin bazı belirleyici özelliklerinin, Bertrand eğrisinin cinsinden ifade edilebileceğini göstermektedirler. Çalışma, hem Levi-Civita bağlantısı hem de normal Levi-Civita bağlantısı cinsinden Bertrand partner eğrisine ait diferansiyel denklemleri sunmaktadır. Ayrıca, Bertrand eğri çifti ile ilişkili partner eğrisinin harmoniklik koşulları da aynı yöntemle elde edilmiştir. Bu yöntemle

bazı yeni sonuçlar elde edilerek, son olarak elde edilen bulgular bir örnekle desteklenmiştir. Bu çalışma, Bertrand eğri çiftlerinin geometrik ve diferansiyel özelliklerinin daha derinlemesine anlaşılmasını sağlayarak, konuya önemli katkılarda bulunmaktadır.

Lucas, P., & Ortega-Yagües (2012), üç boyutlu küreye gömülü bir eğrinin Bertrand eğrisi olabilmesi için başka bir eğri ile arasında bir birebir eşleme olması gerektiği ifade edilmiştir. Bu eşleme, her iki eğrinin karşılık gelen noktalarındaki ortak asli normal geodeziklere sahip olmasını gerektirir. Çalışmanın temel sonuçlarından biri, Bertrand eğrileri için klasik bir sonuçla uyumlu olan bir teoremin sunulmasıdır. Ana teoremin kolay bir uygulaması olarak, Bertrand helislerin, sonsuz sayıda Bertrand karşıt eğrisine sahip olan tek burulmuş eğriler olduğunu karakterize edilmiştir. Ayrıca, çalışmada küre üzerindeki Bertrand eğrileri ile Bertrand helis eğrileri arasındaki çeşitli ilişkiler de keşfedilmiştir. Bu bulgular, Bertrand eğri çiftlerinin özelliklerinin anlaşılmasına yardımcı olmakta ve çeşitli geometrik ve diferansiyel analizlerde kullanılacak önemli sonuçlar ortaya koymaktadır.

Alluhaibi ve Abdel-Baky'nin, 2023 yılında yayımlanan çalışmasında, 3 boyutlu Galile uzayında Bertrand çiftleri ele alınmıştır. Çalışma, farklı bir uzayda da Bertrand eğrilerinin incelenebileceğini ortaya koyduğundan, matematiksel önem taşımaktadır. Çalışmada, teorik sonuçlar çeşitli örneklerle desteklenmiş ve elde edilen bulgular, yöntemin geçerliliğini test etmek amacıyla sunulmuştur.

Mofarreh, F. (2024), Yüzeydeki bir eğrinin geodezik eğri olup olmadığı, asli normal vektörünün yüzey normaline her noktada paralel olmasıyla belirlenmektedir. Serret-Frenet çatısı kullanılarak, Bertrand çifti simetrisine sahip olan bir timelike yüzey çifti, Minkowski 3-uzayındaki çatının bileşenlerinin doğrusal kombinasyonları cinsinden tanımlanmıştır. Bu parametrelili temsillerle, tanımlanan Bertrand çiftinin geodezik eğriler olması için gerekli ve yeterli koşullar türetilmiştir. Çalışma ayrıca, timelike regle yüzeyinin tanımını da sunmaktadır. Yöntemin, bazı önemli modeller

üzerindeki uygulamaları verilmiş ve teorik sonuçlar bu uygulamalarla desteklenmiştir. Elde edilen bulgular, Bertrand çifti simetrisine sahip yüzeylerin geometrik yapısını ve bu yüzeylerdeki geodezik eğrilerin nasıl tanımlandığını daha iyi anlamamıza yardımcı olmaktadır. Bu çalışma, Bertrand çifti ve timelike yüzey çiftlerinin geodezik eğrilerle ilişkisini ve bu geometrik yapıların çeşitli modellerdeki uygulamalarını incelemektedir.

Kazaz ve ark. (2015), Bertrand partner D-eğrilerini (D-curves) Öklid uzayında incelemiştir. Bertrand partner eğrileri, her iki eğrinin de ortak asli normal vektörlerine sahip olduğu ve bu eğrilerin belirli geometrik koşullar altında birbirleriyle ilişkili olduğu bir çift eğridir. Çalışma, Bertrand partner D-eğrilerinin geometrik özelliklerini ve bu eğrilerin Öklid uzayındaki yerini anlamaya yönelik matematiksel analizler yapmaktadır. Çalışma kapsamında, Bertrand partner D-eğrilerinin diferansiyel denklemleri ele alınarak, bu eğrilerin elde edilebilmesi için gerekli şartlar türetilmiştir. Ayrıca, bu eğrilerin geometrik yapıları ve özellikleri, çözüm süreçleri üzerinden detaylandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, Bertrand partner eğrilerinin farklı geometrik yapılarla olan ilişkisini açıklığa kavuşturmuş ve bu tür eğrilerin geometrik analizlerinde kullanılabilecek yeni yöntemler önerilmiştir. Bu araştırma, Bertrand çifti D-eğrilerinin daha derinlemesine anlaşılmasını sağlayarak, diferansiyel geometri ve eğri teorisi alanlarında önemli bir katkı sunmaktadır.

Şenyurt, Çalışkan (2013), timelike Bertrand eğri çiftleri üzerinde sabit nokta eğrisinin küresel involütlerini incelemiştir. Bertrand eğri çiftleri, her iki eğrinin de ortak asli normal vektörlerine sahip olduğu ve bu eğrilerin birbirleriyle belirli geometrik ilişkilerle bağlı olduğu özel eğri çiftleridir. Çalışma, timelike Bertrand eğri çiftlerinin geometrik yapısını ve bu eğriler üzerindeki küresel involütlerin özelliklerini analiz etmektedir. Yazarlar, sabit nokta eğrisinin küresel involütlerinin nasıl tanımlandığını ve bu involütlerin Bertrand eğri çiftleriyle olan ilişkilerini matematiksel olarak ortaya koymuşlardır. Ayrıca, bu involütlerin diferansiyel denklemleri türetilmiş ve bu

eğrilerin geometrik ve fiziksel anlamları ele alınmıştır. Çalışma, timelike Bertrand eğri çiftleri üzerinde yapılan analizin önemli bir adımı olarak, bu tür eğri çiftlerinin daha geniş geometrik yapılar içinde nasıl işlediğini göstermektedir. Elde edilen bulgular, timelike Bertrand eğri çiftlerinin ve bunların küresel involütlerinin diferansiyel geometri alanındaki uygulamalarını derinleştirmektedir ve Bertrand eğrileri ile ilgili literatürdeki anlayışımıza katkı sağlamaktadır. Bu çalışma, teorik matematiksel analizlerin yanı sıra, timelike geometri ve eğri teorisinin daha ileri düzeyde anlaşılmasına olanak tanımaktadır.

Yavuz ve Erdoğan, 2020 çalışmalarında, yazarlar "Null olmayan Bertrand W eğrileri"ni incelemiş ve bu eğrilerin diferansiyel denklemlerini çözmek için yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Bertrand W eğrileri, Bertrand eğri çiftlerinin özel bir sınıfıdır ve bu çiftlerin konum vektörlerinin diferansiyel denklemlerini kullanarak daha genel bir çözüm yaklaşımı önerilmektedir. Çalışma, bu eğrilerin konum vektörü üzerinden tanımlanan diferansiyel denklemleri ele almakta ve bu denklemleri çözerek null olmayan Bertrand W eğrilerinin geometrik özelliklerini ortaya koymaktadır. Yazarlar, Bertrand W eğrilerinin diferansiyel denklemlerle çözümünü sağlayan yeni bir yöntem geliştirmiş ve bu yöntemle eğrilerin konum vektörlerini sistematik bir şekilde analiz etmiştir. Çalışmada, Bertrand W eğrilerinin fiziksel ve matematiksel olarak anlamı üzerinde durulmuş, özellikle null olmayan eğrilerin, daha önce bilinen Bertrand eğrilerinden farklı özelliklere sahip olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca, bu eğrilerin özel geometrik özellikleri ve ilişkileri, geliştirilen diferansiyel denklemler aracılığıyla detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Sonuç olarak, bu çalışma, Bertrand W eğrileri üzerine yapılan teorik çalışmaları genişletmekte ve null olmayan eğrilerin geometri alanında daha geniş bir bakış açısı sunmaktadır. Bu yeni yaklaşım, Bertrand eğri çiftlerinin daha derinlemesine incelenmesine olanak tanırken, diferansiyel geometri ve eğri teorisi üzerine yapılacak gelecekteki araştırmalara da katkı sağlamaktadır.

## SONUÇ

Bertrand eğri çiftleri ve Genişletilmiş Dym (ED) denklemi üzerine yapılan çalışmalar, matematiksel fizik ve diferansiyel geometri alanlarında köklü bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Bu alanlar, özellikle soliton teorisi, geometride özel yüzeylerin incelenmesi ve diferansiyel denklemlerle ilişkilendirilen eğrilerin analizinde önemli bir yer tutmaktadır. Soliton teorisinin doğasında bulunan doğrusal olmayan dalga denklemlerinin çözümleri, geometrik yapılar ve fiziksel modeller arasında bir köprü oluşturarak, uygulamalı matematiğe katkıda bulunmaktadır. Bu bağlamda, ED denkleminin geometrik yapılarına dayalı çalışmalar, diferansiyel geometri içerisinde yeni yüzeylerin tanımlanmasını ve bu yüzeylere ait eğrilerin özel karakteristiklerinin ortaya çıkarılmasını sağlamıştır. Özellikle Bertrand eğri çiftlerinin ED yüzeyleri üzerindeki davranışı, geometrik dönüşümlerle ilişkilendirilerek, eğri teorisi kapsamında önemli sonuçlar elde edilmiştir. Mevcut literatür, Bertrand eğri çiftlerinin klasik tanımları üzerinde yoğunlaşmakla birlikte, bu eğrilerin daha karmaşık geometrik yapılar, dönüşümler ve yeni yüzey sistemleriyle olan etkileşimini tam anlamıyla ortaya koymamıştır.

Gelecekte yapılacak çalışmalar, ED denkleminin geometrik yapılarını Bertrand eğri çiftleriyle ilişkilendirerek yeni soliton çözümlerinin türetilmesine odaklanabilir. Bu durum, soliton teorisinin yalnızca matematiksel fizik için değil, sıvı dinamiği, optik fiberler gibi alanlarda da önemli uygulamalara yol açabilir. Ayrıca, diferansiyel geometri araçlarının ve Bäcklund dönüşümleri gibi yöntemlerin kullanımı, Bertrand eğri çiftlerinin ED denklemlerine dayalı olarak tanımlanan yeni yüzeylerle daha ileri düzeyde incelenmesini sağlayacaktır. Bu çalışmalar, teorik modelleri güçlendirerek, hem analitik çözümler açısından yeni ufuklar sunacak hem de matematiksel araçların mühendislik ve fizik gibi disiplinlerdeki uygulamalarını genişletecektir. Böylece, bu alanda yapılacak yeni araştırmalar, matematiksel

*Bertrand Eğri Çiftleri ve Geniştirilmiş Dym Denklemleri: Geometrik Yapılar ve Soliton Teorisi Perspektifinden Bir İnceleme*

fizik ile diferansiyel geometri arasındaki ilişkiyi artırarak literatüre önemli katkılar sağlayacaktır.



## KAYNAKLAR

- A. Razzaboni, (1901). Un teorema del signor Demartres generalizzato, Ven. Ist. Atti. 60. 757–768.
- Abbena, E., Salamon, S., & Gray, A. (2017). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC.
- Alluhaibi, Nadia, and Rashad A. Abdel-Baky. 2023. "Surface Pencil Couple with Bertrand Couple as Joint Principal Curves in Galilean 3-Space" *Axioms* 12, no. 11: 1022. <https://doi.org/10.3390/axioms12111022>
- Backlund, A. (1880). "The Transformation of Pseudo-Spherical Surfaces." *Acta Mathematica*, 2(1), 1-68.
- Bianchi, L. (1892). *Lezioni di Geometria Differenziale*. Bologna: Zanichelli.
- Bullough, R. K., 1988. "The Wave par excellence, the solitary, progressive great wave of equilibrium of the fluid - an early history of the solitary wave" In *Solitons* (M. Lakshmanan, Ed.), Springer Series in Nonlinear Dynamics, 150-281, New York, Berlin, Heidelberg etc.: Springer.
- Calini, A., & Ivey, T. (2021). Integrable geometric flows for curves in pseudoconformal  $S^3$ . *Journal of Geometry and Physics*, 166, 104249.
- Cieslinski, J. L. (1995). "An integrable discretization of the Dym equation." *Physics Letters A*, 197(1), 73-76.
- Chen, B. Y. and Dillen F., 2005. "Rectifying curves as centrodes and extremal curves", *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, 33, 77-90.
- Da Rios, L.S., 1906. "Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso", *Rend. Circ. Mat. Palermo* 22,117–135.
- Do Carmo, M. P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice – Hall, New Jersey, 511.
- Erdoğan, M., & Yavuz, A. (2022). On Backlund transformation and motion of null Cartan curves. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 19(01), 2250014.

*Bertrand Eğri Çiftleri ve Genişletilmiş Dym Denklemleri: Geometrik Yapılar ve Soliton Teorisi Perspektifinden Bir İnceleme*

- Erdoğan, M., & Özdemir, M. (2019). On Razzaboni Transformation of Surfaces in Minkowski 3-Space. *Cumhuriyet Science Journal*, 40(1), 87-101.
- Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A.R., Krumhansl J. A., 1977. "Dynamics of sine-Gordon Solitons in the Presence of Perturbations". *Physical Review B*. 15.
- Gray, A. (1998). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press.
- Grinevich, P. G., Orlov, A. Y., & Schulman, E. I. (1993). On the symmetries of integrable systems. In *Important Developments in Soliton Theory* (pp. 283-301). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Kazaz, M., Uğurlu, H. H., Önder, M., Oral, S. (2015). Bertrand Partner D -Curves in the Euclidean 3-space 3 E. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 16(1), 76-83. <https://doi.org/10.5578/fmbd.25270>
- Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963) *Foundation of Differential Geometry*, Vol. 1. Interscience Publishers, New York, London, Sydney.
- Korteweg D. J., Vries, G. D., 1895. "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves". *Philos. Mag.* 39, 422-443.
- Lucas, P., & Ortega-Yagües, J. A. (2012). Bertrand curves in the three-dimensional sphere. *Journal of geometry and physics*, 62(9), 1903-1914.
- Mofarreh, F. (2024). Timelike Surface Couple with Bertrand Couple as Joint Geodesic Curves in Minkowski 3-Space. *Symmetry*, 16(6), 732. <https://doi.org/10.3390/sym16060732>
- Nimmo, J. J., & Schief, W. K. (1997). Superposition principles associated with the Moutard transformation: an integrable discretization of a  $(2+1)$ -dimensional sine-Gordon system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 453(1957), 255-279.
- Pinkall, U., & Sterling, I. (1989). "On the classification of constant mean curvature tori." *Annals of Mathematics*, 130(2), 407-451.

*Bertrand Eğri Çiftleri ve Genişletilmiş Dym Denklemleri: Geometrik Yapılar ve Soliton Teorisi Perspektifinden Bir İnceleme*

- Rogers, C., Schief, W.K. 2002. Backlund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory (1). United Kingdom: Cambridge University Press.
- Russell, J. S., 1845. "Report on Waves". Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, September, 311-390.
- Sabuncuoğlu, A., 2014. Diferensiyel Geometri, Nobel, Ankara-Türkiye, 74-79.
- Schief, W. K., & Rogers, C. (1999). Binormal motion of curves of constant curvature and torsion. Generation of soliton surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1988), 3163-3188.
- Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. Dover Publications.
- Şenyurt S, Çakır O. Characterizations of Bertrand curve pairs via new Frenet formulas. *SIGMA*. 2023;41(6):1115-20.
- Şenyurt, S., Çalışkan Ö.F, Spherical involutes of the fixed pole curve on the timelike bertrand curve couple, *J. Math. Comput. Sci.*, 3 (2013), 32-37.
- Taimanov, I. A. (1997). "Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces." *American Mathematical Society Translations*, 179(2), 133-151.
- Weatherburn, C. E. (1927). Differential geometry of three dimensions (Vol. 1). The University Press.
- Yavuz, A., & Erdogdu, M. (2020). Non-lightlike Bertrand W curves: A new approach by system of differential equations for position vector. *AIMS Math*, 5(6), 5422-5438.
- Yüce, S., 2017, Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, Pegem Akademi, Ankara-Türkiye, 224-257.
- Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D. (1975). "Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States." *Physical Review Letters*, 15(6), 240-243.

# BÖLÜM 2

## 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZİTZEİCA EĞRİLER

*Enes ORUÇ<sup>1</sup>*

*Mehmet BEKTAŞ<sup>2</sup>*

---

<sup>1</sup> Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Öğrencisi,  
<sup>2</sup> Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Öğretim Üyesi,

## 1. GİRİŞ

Romen matematikçi George Tzitzeica, Tzitzeica yüzeylerini [1] de ve Tzitzeica eğrilerini [2] de tanımlayarak literatüre yeni kavramları kazandırdı. [3-5.] deki araştırmacılar, 3-boyutlu Öklid uzayındaki eğriler ve yüzeylerin Tzitzeica eğri ve Tzitzeica yüzey olması için yeni teoriler inşa ettiler. Özellikle 3- boyutlu Öklid uzayında eğriler için yapılan çalışmaların 3- boyutlu Lorentz uzayında karşılıklarını araştırmak geometricilerin çalışma alanlarının başında gelmektedir [6-8]. Fakat 3- boyutlu Lorentz uzayında eğri tanımı 3- boyutlu Öklid uzayındakinden farklı olarak spacelike, timelike ve null olarak sınıflandırılması yapılan çalışmaları çeşitlendirmiştir. Bu bakış açısı ile 3- boyutlu Lorentz uzayında Tzitzeica eğriler üzerine ilginç çalışmalar elde edilmesine imkan tanımıştır [9-11].

Tüm bu çalışmalara ilaveten [12] de Emrah TUNÇ ve Bengü BAYRAM 4- boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğriler için üç tip Tzitzeica eğri tanımlayarak diferensiyel geometriciler için çok önemli bir çalışma alanını açmışlardır. Bu bakış açısı ile yapılan bu çalışmanın amacı 4- boyutlu Lorentz uzayında timelike ve spacelike eğriler için Tzitzeica eğriler üzerine yeni teorileri ifade ve ispat etmektir.

## 2. LORENTZ UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI

**Tanım 2.1.**  $R^4$  de  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$  ve  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  gibi iki vektörün

$$\langle \zeta, \eta \rangle = -\zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \zeta_3\eta_3 + \zeta_4\eta_4$$

şeklinde tanımlanan iç çarpımı Lorentz (veya Minkowski) iç çarpımı olarak tanımlanır.

Böylece  $\{R^4, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  ikilisine 4-boyutlu Lorentz uzayı denir ve  $L^4 = \{R^4, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  ile ifade edilir.[7].

**Tanım 2.2.** Bir  $\vec{x} \in L^4$  vektörüne

#### 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZİTZEİCA EĞRİLER

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$  ise spacelike vektör

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$  ise timelike vektör

$\vec{x}$  Sıfırdan farklı bir vektör ve  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$  ise lightlike yada Null vektör denir [7].

**Tanım 2.3.** 4-boyutlu Lorentz uzayı  $L^4$  nin iki  $\vec{x}, \vec{y}$  vektörü için  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$  ise bu iki vektör Lorentz uzayında diktirler denir [13].

**Tanım 2.4.** Lorentz uzayında bir  $\vec{x}$  vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \begin{cases} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle, & \vec{x} \text{ spacelike vektör ise} \\ -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle, & \vec{x} \text{ timelike vektör ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [13].

**Tanım 2.5.** Bir  $\alpha$  eğrisine

$\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$  ise time like eğri

$\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$  ise space-like eğri

$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$  ise null veya lightlike eğri adı verilir [13].

**Tanım 2.6.**  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $L^4$  de tanımlı sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. Kabul edelim ki bu eğrinin  $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{IV}(s), \alpha^V(s)$  türevleri mevcut olsun. Bu durumda  $s \in I$  için aşağıdaki bağıntıları sağlayan  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  ortonormal çatısına Frenet çatısı ve bu çatının  $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  ifadelerine Frenet eğrilikleri denir. Böylece Frenet çatısı

$$\xi_1'(s) = \varepsilon_2(s)K_1(s)\xi_2(s),$$

$$\xi_2'(s) = -\varepsilon_1(s)K_1(s)\xi_1(s) + \varepsilon_3(s)K_2(s)\xi_3(s), \quad (2.1)$$

$$\xi_3'(s) = -\varepsilon_2(s)K_2(s)\xi_2(s) + \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)K_3(s)\xi_4(s),$$

$$\xi_4'(s) = \varepsilon_3(s)K_3(s)\xi_3(s),$$

#### 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

şeklinde tanımlanır. Burada  $\xi_1(s)$ ,  $\xi_2(s)$ ,  $\xi_3(s)$  ve  $\xi_4(s)$  ler için  $\langle \xi_i(s), \xi_i(s) \rangle = \varepsilon_i(s)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $\varepsilon_1(s) = \mp 1$  ve  $\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)\varepsilon_4(s) = -1$  dir [13].

$\alpha = \alpha(s)$ ,  $L^4$ , 4- boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı spacelike veya timelike eğri olmak üzere  $\alpha = \alpha(s)$  konum vektörü

$$\alpha(s) = \sum_{i=1}^4 \beta_i(s) \xi_i(s) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada  $1 \leq i \leq 4$ , için

$$\beta_i(s) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\varepsilon_i(s)} \langle \alpha(s), \xi_i(s) \rangle, \quad (2.3)$$

olarak yazılır.

### 3. TZITZEİCA EĞRİLER

**Tanım 3.1. (Birinci tip Tzitzeica eğrisi)**  $L^4$ , 4- boyutlu Lorentz uzayında  $\alpha = \alpha(s)$  bir spacelike veya timelike eğri ve  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  ve Frenet eğrilikleri  $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  olsun. Eğer  $\alpha = \alpha(s)$  birinci tip Tzitzeica eğrisi ise

$$\frac{K_2(s)}{d_{\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_4(s)\}}^2} = a_1 \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanır.

Burada  $d_{\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_4(s)\}}$  keyfi bir  $\alpha(s)$  noktasında orijinden  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_4(s)\}$  ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_4(s)\}}^2 = \langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle \quad (3.2)$$

şeklide tanımlanır. Burada  $a_1 \neq 0$  reel sabittir [ 12 ].

#### 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

**Tanım 3.2. (İkinci tip Tzitzeica eğrisi)**  $L^4$ , 4- boyutlu Lorentz uzayında  $\alpha = \alpha(s)$  bir spacelike veya timelike eğri ve  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  ve Frenet eğrilikleri  $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  olsun. Eğer  $\alpha = \alpha(s)$  ikinci tip Tzitzeica eğrisi ise

$$\frac{K_1(s)}{d_{\{\xi_1(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}}^2} = a_2 \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanır.

Burada  $d_{\{\xi_1(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}}$  keyfi bir  $\alpha(s)$  noktasında orijinden  $\{\xi_1(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{\xi_1(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}} = \langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle \quad (3.4)$$

şeklide tanımlanır. Burada  $a_2 \neq 0$  reel sabittir [ 12 ].

**Tanım 3.3. (Üçüncü tip Tzitzeica eğrisi)**  $L^4$ , 4- boyutlu Lorentz uzayında  $\alpha = \alpha(s)$  bir spacelike veya timelike eğri ve  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  ve Frenet eğrilikleri  $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  olsun. Eğer  $\alpha = \alpha(s)$  üçüncü tip Tzitzeica eğrisi ise

$$\frac{K_3(s)}{d_{\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)\}}^2} = a_3 \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır.

Burada  $d_{\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)\}}$  keyfi bir  $\alpha(s)$  noktasında orijinden  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)\}$  ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)\}} = \langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle \quad (3.6)$$

şeklide tanımlanır. Burada  $a_3 \neq 0$  reel sabittir [ 12 ].

**Teorem 3.4.**  $\alpha = \alpha(s)$ , 4- boyutlu Lorentz uzayı  $L^4$  de bir spacelike veya timelike eğri,  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  eğrinin Frenet çatısı ve



#### 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

$K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer  $\alpha = \alpha(s)$  spacelike veya timelike eğri birinci tip Tzitzeica eğri ise

$$\varepsilon_3(s)K_2'(s)\beta_3(s) + 2K_2^2(s)\beta_2(s) - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)K_2(s)K_3(s)\beta_4(s) = 0 \quad (3.7)$$

diferensiyel denklemi sağlanır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\alpha = \alpha(s)$  spacelike veya timelike eğri birinci tip Tzitzeica eğri olsun. O zaman (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\frac{K_2(s)}{(\langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle)^2} = a_1 \quad (3.8)$$

yazılabilir. (3.8) eşitliğinin türevi alınır

$$K_2'(s) (\langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle)^2 - 2K_2(s) \langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_3'(s) \rangle = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir.(3.9) da (2.1) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$K_2'(s) (\langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle)^2 + 2\varepsilon_2(s)K_2^2(s) \langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)K_2(s)K_3(s) \langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.3) kullanılırsa

$$\varepsilon_3^2(s)K_2'(s)\beta_3^2(s) + 2\varepsilon_2^2(s)\varepsilon_3(s)K_2^2(s)\beta_2(s)\beta_3(s) - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3^2(s)K_2(s)K_3(s)\beta_3(s)\beta_4(s) = 0$$

veya gerekli kısaltmalar sonucu

$$\varepsilon_3(s)K_2'(s)\beta_3(s) + 2K_2^2(s)\beta_2(s) - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)K_2(s)K_3(s)\beta_4(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

#### 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

**Teorem 3.5.**  $\alpha = \alpha(s)$ , 4- boyutlu Lorentz uzayı  $L^4$  de bir spacelike veya timelike eğri,  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  eğrinin Frenet çatısı ve  $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer  $\alpha = \alpha(s)$  spacelike veya timelike eğri ikinci tip Tzitzeica eğri ise

$$\varepsilon_2(s)K_1'(s)\beta_2(s) + 2K_1^2(s)\beta_1(s) - 2K_1(s)K_2(s)\beta_3(s) = 0 \quad (3.11)$$

diferensiyel denklemini sağlar.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\alpha = \alpha(s)$  spacelike veya timelike eğri ikinci tip Tzitzeica eğri olsun. O zaman (3.3) ve (3.4) eşitliklerinden

$$\frac{K_1(s)}{(\langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle)^2} = a_2 \quad (3.12)$$

yazılabilir. (3.12) eşitliğinin türevi alınırsa

$$K_1'(s) (\langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle)^2 - 2K_1(s) \langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_2'(s) \rangle = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir.(3.13) da (2.1) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$K_1'(s) (\langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle)^2 + 2\varepsilon_1(s)K_1^2(s) \langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_1(s) \rangle - 2\varepsilon_3(s)K_1(s)K_2(s) \langle \alpha(s), \xi_2(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.3) kullanılırsa

$$\varepsilon_2^2(s)K_1'(s)\beta_2^2(s) + 2\varepsilon_1^2(s)\varepsilon_2(s)K_1^2(s)\beta_1(s)\beta_2(s) - 2\varepsilon_2(s)\varepsilon_3^2(s)K_2(s)K_3(s)\beta_2(s)\beta_3(s) = 0$$

veya gerekli kısaltmalar sonucu

$$\varepsilon_2(s)K_1'(s)\beta_2(s) + 2K_1^2(s)\beta_1(s) - 2K_1(s)K_2(s)\beta_3(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

#### 4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

**Teorem 3.6.**  $\alpha = \alpha(s)$ , 4- boyutlu Lorentz uzayı  $L^4$  de bir spacelike veya timelike eğri,  $\{\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s), \xi_4(s)\}$  eğrinin Frenet çatısı ve  $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$  eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer  $\alpha = \alpha(s)$  spacelike veya timelike eğri üçüncü tip Tzitzeica eğri ise

$$\varepsilon_4(s)K_3'(s)\beta_4(s) + 2K_3^2(s)\beta_3(s) = 0 \quad (3.15)$$

diferensiyel denklemini sağlar.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\alpha = \alpha(s)$  spacelike veya timelike eğri üçüncü tip Tzitzeica eğri ise (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden

$$\frac{K_3(s)}{(\langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle)^2} = a_3 \quad (3.16)$$

yazılabilir. (3.16) eşitliğinin türevi alınırsa

$$K_3'(s) \langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle^2 - 2K_3(s) \langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_4'(s) \rangle = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir.(3.17) da (2.1) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$K_3'(s) \langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle^2 + 2\varepsilon_3(s)K_3^2(s) \langle \alpha(s), \xi_3(s) \rangle \langle \alpha(s), \xi_4(s) \rangle = 0. \quad (3.18)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.3) kullanılırsa

$$\varepsilon_4^2(s)K_3'(s)\beta_4^2(s) + 2\varepsilon_3^2(s)\varepsilon_4(s)K_3^2(s)\beta_3(s)\beta_4(s) = 0$$

veya gerekli kısaltmalar sonucu

$$\varepsilon_4(s)K_3'(s)\beta_4(s) + 2K_3^2(s)\beta_3(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

- [1] G. Tzitzeica, “Sur une nouvelle classe de surfaces”, Comptes Rendus des S’éances de l’Acad’emie des Sciences Paris, vol. 144, no 1, p. 1257-1259, 1907.
- [2] G. Tzitzeica, “Sur certaines courbes gauches”, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, vol. 28, no 3, p. 9-32, 1911
- [3] N. Bila, “Symmetry reductions for the Tzitzeica curve equation”, Math and Computer Science Working Papers, vol. 16, 2012.
- [4] A.F. Agnew, A. Bobe , W.G. Boskoff and B.D.Suceava, Tzitzeica curves and surfaces, The Mathematica Journal, 12, 1-18., 2010.
- [5] M. Crasmareanu, Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators, Balkan J. Geom. Appl., 7 , 1, 37-42, 2002.
- [6] H. Balgetir, M. Bektas and M. Ergut, Bertrand curves for non-null curves in 3-dimensional Lorentzian space, Hadronic Journal, 229-236, 2016.
- [7] F. Bulut and M. Bektaş, Special helices on equiform differential geometry of spacelike curves in Minkowski space-time. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69(2), 1045-1056, 2020.
- [8] M. Bektas, M. Ergut and D.Soylu, The characterization of the spherical timelike curves in 3-dimensional Lorentzian space. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 21(2), 1998.
- [9] M. E.Aydın and M. Ergüt, Non-null curves of Tzitzeica type in Minkowski 3-space, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 81-90, 2014.
- [10] M. K. Karacan and B. Bükcü, “On the hyperbolic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space”, BAÜ FBE Dergisi, vol. 10, no 1, p. 46-51, 2009.
- [11] M. K. Karacan and B. Bükcü, “On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3- space”, Scientia Magna, vol. 5, no 3, p. 44-48, 2009.

#### *4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER*

- [12] E.Tunç and B. Bayram, A New Characterization of Tzitzeica Curves in Euclidean 4-Space. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*,4(2), 77-86, 2023.
- [13] E.Ç. Çetin, M. Bektaş and M.Y. Yılmaz, On the Associated Curves of a Frenet Curve in  $R_4^1$  *Cumhuriyet Science Journal*, 43(2), 273-276, 2022.

# BÖLÜM 3

## DUAL DEĞİŞKENLİ KÜRESEL BÉZIER EĞRİLERİNDE BLASHKE ÇATI\*

*Muhsin İNCESU<sup>1</sup>*

*Fadime TEKGÜL<sup>2</sup>*

\* Bu çalışma Fadime TEKGÜL'ün Yüksek Lisans Tezinden üretilmiştir. Muş Alparslan Üniv. Fen Bil. Ens. Mat. ABD, Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU, 2024.  
1 Doç. Dr.; Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.  
m.incesu@alparslan.edu.tr ORCID No: 0000-0003-2515-9627  
2 Öğretmen; Malatya il Milli Eğitim Müdürlüğü . fadime6\_6@hotmail.com  
ORCID No: 0000-0001-8781-8072

## 1. GİRİŞ

CAD / CAM sistemlerinin yani bilgisayar destekli tasarımın en önemli unsurlarından biri Parametrik eğriler ve yüzeylerdir. Bu alanda yer alan kavramların başında da Bézier eğrileri ve yüzeyleri gelmektedir. Bezier eğrileri, en kararlı çözümleri veren polinom eğriler olduklarından bu eğrilerle ilgili pek çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlara örnek olarak G. Farin (1990), R. Farouki (1985), J.Hoschek (1985), H. Potmann (1995), Incesu (2003, 2004), Samancı H., Çelik S, Incesu M (2015), Samancı H (2018, 2021), Samancı H ve Incesu M (2020), Ören ve Incesu (2020), çalışmaları verilebilir.

Mekanik ve Mekanizmalar teorisinde sıklıkla kullanılan regle yüzey kavramı ve bununla ilişkili olarak da dual uzay ve D-modül üzerindeki eğriler robotik, mimari ve diğer endüstriyel alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Regle yüzeyler Öklid uzayları, Lorentz - Minkowski uzayları, Galile ve pseudo-Galile uzayları gibi birçok uzayda incelenmiştir Hacısalihoğlu, (1972, 1983), Gursoy (1992), Gursoy ve Küçük (1999, 2004), Kazaz, Özdemir ve Güroğlu (2008), Nesovic vd., (2016), Güler ve Kasap, (2018), (Hathout, Bekar ve Yaylı, 2017), Taş (2016), (Taş ve İlarıslan, 2019), (Taş ve Gursoy, 2018) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Incesu (2022) de dual uzayda Bezier eğrilerini reel parametre olarak çalışmıştır. Yani dual uzayda Bezier eğrileri ve birim dual küre üzerine projeksiyon eğrileri, reel parametreye bağlı olarak bir digger ifadeyle  $t^* = 0$  durumunda verilmiştir. Keyfi dual değişkenler için Bernstein polinomlarını da Samancı (2015, 2017) vermiştir.

Bu çalışmada parametre keyfi dual değişken alınarak Bezier eğrileri çalışılmıştır.

## 2. DUAL KÜRESEL BEZİER EĞRİLERİ

3-Boyutlu reel Öklid uzayında alınan ve kontrol noktaları  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  olan n. ci dereceden bir Bezier eğrisi

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n t P_i$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $B_i^n(t)$ , Bernstein taban polinomlarıdır.

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

biçimindedir.

Dual değişkenli ve kontrol noktaları  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$  dual vektörleri olan bir Bezier eğrisi ise benzer şekilde yazılıp reel ve dual kısmına ayrıldığında,

$$\hat{B}(t + \varepsilon t^*) = B(t) + \varepsilon(B^*(t) + t^*B'(t))$$

dır. (Tekgül, 2024). Burada  $B(t)$ , kontrol noktaları  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  olan reel Bezier eğrisi; ve  $B^*(t)$ , kontrol noktaları  $P_0^*, P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$  olan reel Bezier eğrisidir. Bu eğrinin dual birim küre üzerine izdüşümü eğrisi de;

$$\bar{B}(t + \varepsilon t^*) = \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|}$$

$$\bar{B}(\hat{t}) = \frac{B(t)}{\|B(t)\|} + \varepsilon \left[ \frac{B^*(t)}{\|B(t)\|} - \frac{\langle B(t), B'(t) \rangle}{\|B(t)\|^3} B(t) + t^* \left[ \frac{B'(t)}{\|B(t)\|} - \frac{\langle B(t), B'(t) \rangle}{\|B(t)\|^3} B(t) \right] \right]$$

dir.

Şimdi bu eğri üzerinde Blashke Çatısını ifade edelim;

$$A_1 = \bar{B}$$

$$A_2 = \frac{A_1'}{\|A_1'\|}$$

$$A_3 = A_1 \times A_2$$

olarak tanımlanmıştır. Kısaltma için  $\hat{B}(t + \varepsilon t^*)$  yerine  $\hat{B}$ ;  $B(t)$  yerine  $B$ ;  $B^*(t)$  yerine  $B^*$ ;  $\bar{B}(t + \varepsilon t^*)$  yerine de  $\bar{B}$  yazarsak türev denklemlerinden

$$\hat{B} = B + \varepsilon(B^* + t^*B')$$

$$\hat{B}' = B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')$$

$$\hat{B}'' = B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^*B''')$$

$$\hat{B}''' = B''' + \varepsilon(B^{*'''} + t^*B''')$$

dir. O halde Blashke çatıyı oluşturalım:

### 3. BLASHKE ÇATI

Önce  $\|\hat{B}\|'$  ifadesini bulalım;

$$\|\hat{B}\|' = \left( \sqrt{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle} \right)' = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle'}{2\sqrt{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle}} = \frac{2\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{2\|\hat{B}\|} = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|}$$

olduğu görülür. O halde  $\bar{B}'$  ifadesi:

$$\begin{aligned} \bar{B}' &= \left[ \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \right]' = \frac{\hat{B}' \cdot \|\hat{B}\| - \hat{B} \cdot \|\hat{B}\|'}{\|\hat{B}\|^2} \\ &= \frac{\hat{B}' \cdot \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \cdot \|\hat{B}\|^3} \hat{B} \\ &= \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\|^2 - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3} \end{aligned}$$

bulunur. O halde



$$\begin{aligned} \bar{B}' &= \\ \frac{[B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')]. \left[ \|B\| + \varepsilon \frac{\langle B, B^* + t^*B' \rangle}{\|B\|} \right] - \langle B + \varepsilon(B^* + t^*B') \rangle, [B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')]}{\left[ \|B\| + \varepsilon \frac{\langle B, B^* + t^*B' \rangle}{\|B\|} \right]^3} \\ &= \frac{[B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')]. [\|B\|^2 + 2\varepsilon\langle B, B^* + t^*B' \rangle] - \langle B, B' \rangle + \varepsilon(\langle B, B^{*'} + t^*B'' \rangle + \langle B^* + t^*B' \rangle), [B + \varepsilon(B^* + t^*B')]}{\|B\|^3 + 3\|B\|\varepsilon\langle B, B^* + t^*B' \rangle} \\ &= \frac{[B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle] + \varepsilon \left[ \begin{array}{l} 2\langle B, B^* \rangle B' + \|B\|^2 B^{*'} - \langle B, B' \rangle B' - (\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B^*, B' \rangle) B \\ + t^* [2\langle B', B \rangle B' + \|B\|^2 B'' - \langle B, B' \rangle B' - (\langle B, B'' \rangle + \|B'\|^2) B] \end{array} \right]}{\|B\| [\|B\|^2 + 3\varepsilon\langle B, B^* + t^*B' \rangle]} \\ &= \left[ \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \right] + \\ + \varepsilon \left[ \begin{array}{l} -\frac{\langle B, B^* \rangle B'}{\|B\|^3} + \frac{B^{*'}}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B^*}{\|B\|^3} + \left( \frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B^*, B' \rangle}{\|B\|^3} \right) B \\ + t^* \left[ \frac{-2\langle B, B' \rangle B'}{\|B\|^3} + \frac{B''}{\|B\|} + \left( \frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B'' \rangle + \|B'\|^2}{\|B\|^3} \right) B \right] \end{array} \right] \end{aligned}$$

Bu ifade normuna bölünürse Blashke Çatısının ikinci birim vektörü

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[ \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B \times (B' \times B)\|} \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\|B \times (B' \times B)\|} \left[ \begin{array}{l} -\langle B, B^* \rangle B' + \|B\|^2 B^{*'} - \langle B, B' \rangle B^* + \left( \frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} - \langle B, B^{*'} \rangle - \langle B^*, B' \rangle \right) B \\ + t^* \left( -2\langle B, B' \rangle B' + \|B\|^2 B'' + \left( \frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^2} - \langle B, B'' \rangle - \|B'\|^2 \right) B \right) \\ + \frac{1}{\|B \times (B' \times B)\|^3} \left[ \begin{array}{l} \|B\|^5 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle - \|B\|^7 \langle B', B^{*'} \rangle + \\ \|B\|^5 \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle \\ - 2\|B\|^3 \langle B, B' \rangle^2 \langle B, B' \rangle + \|B\|^5 \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle \\ + t^* \left[ 2\langle B, B' \rangle \|B'\|^2 \|B\|^5 - \|B\|^7 \langle B', B'' \rangle - 2\langle B, B' \rangle^3 \|B\|^3 \\ + \|B\|^5 \langle B, B' \rangle \langle B, B^* \rangle \right] \left[ \frac{\|B\|^2 B' - \langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \right] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{aligned}$$

olur. Sadeleştirirsek ;

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[ \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B \times (B' \times B)\|} \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\|B \times (B' \times B)\|} \left[ \begin{array}{l} -\langle B, B^* \rangle B' + \|B\|^2 B^{*'} - \langle B, B' \rangle B^* + \left( \frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} - \langle B, B^{*'} \rangle - \langle B^*, B' \rangle \right) B \\ \frac{\|B\|^2}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left[ \begin{array}{l} \|B'\|^2 \langle B, B^* \rangle - \|B\|^2 \langle B', B^{*'} \rangle + \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle \\ - \frac{2\langle B, B' \rangle^2 \langle B, B^* \rangle}{\|B\|^2} + \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle \end{array} \right] \|B\|^2 B' - \langle B, B' \rangle B \\ + t^* \left[ \begin{array}{l} -2\langle B, B' \rangle B' + \|B\|^2 B'' + \left( \frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^2} - \langle B, B'' \rangle - \|B'\|^2 \right) B \\ + \frac{\|B\|^2}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left[ \begin{array}{l} 2\langle B, B' \rangle \|B'\|^2 - \|B\|^2 \langle B', B'' \rangle \\ - \frac{2\langle B, B' \rangle^3}{\|B\|^2} + \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle \end{array} \right] \|B\|^2 B' - \langle B, B' \rangle B \end{array} \right] \end{array} \right] \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A_3 = A_1 \times A_2$$

olacağından,

$$= \frac{\|B\|}{\|B \times (B' \times B)\|} (B \times B') +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\|B \times (B' \times B)\|} \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{-2\langle B, B^* \rangle}{\|B\|} + \frac{\|B\|^3}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left( \begin{array}{l} \|B'\| \langle B, B^* \rangle - \|B\|^2 \langle B', B^{*'} \rangle + \\ \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle \\ + \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle - \frac{2\langle B, B' \rangle^2 \langle B, B^* \rangle}{\|B\|^2} \end{array} \right) \right] \\ \|B\| (B \times B^{*'}) + \|B\| (B^* \times B') \\ + t^* \left[ \|B\| (B \times B^{*''}) + \left[ \begin{array}{l} \frac{-2\langle B, B' \rangle}{\|B\|} + \frac{\|B\|^3}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \\ \left( 2\langle B, B' \rangle \|B'\|^2 - \|B\|^2 \langle B', B^{*''} \rangle \right) \\ \left( -\frac{2\langle B, B' \rangle^3}{\|B\|^2} + \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*''} \rangle \right) \end{array} \right] \right] \end{array} \right] B \times B'$$

olur.

#### 4. BLASHKE ÇATIDA TÜREV DENKLEMLERİ

$$A_1' = \overline{B'} = \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B}$$

$$= \left[ \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^3} \right] + \varepsilon \left[ \begin{array}{l} \frac{-\langle B, B^* \rangle}{\|B\|^3} B' + \frac{B^{*'}}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^3} B^* \\ + \left( \frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B^*, B' \rangle}{\|B\|^3} \right) B \\ + t^* \left[ \frac{-2\langle B, B' \rangle B'}{\|B\|^3} + \frac{B^{*''}}{\|B\|} + \left( \frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B^{*''} \rangle + \|B\|^2}{\|B\|^3} \right) B \right] \end{array} \right]$$

$$= p_{A_1} A_1 + q_{A_1} A_2 + r_{A_1} A_3$$

yazıldığında

$$p_{A_1} = \langle A_1', A_1 \rangle$$

$$q_{A_1} = \langle A_1', A_2 \rangle$$

$$r_{A_1} = \langle A_1', A_3 \rangle$$

olur. O halde;

$$p_{A_1} = \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B}, \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}\|^4}$$

$$= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2}$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
 q_{A_1} &= \langle A'_1, A_2 \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B}, \left( \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right) \frac{1}{\left\| \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right\|} \right\rangle \\
 &= \frac{\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}\|^4}}{\left\| \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right\|^2} = \frac{\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}\|^4}}{\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}\|^2}} \\
 q_{A_1} &= \frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} \\
 &= \frac{\|(BxB') + \varepsilon((BxB^*) + (B^*xB') + t^*(BxB''))\|}{\|B\| + \langle B, B^* + t^*B' \rangle} \\
 &= \|BxB'\| + \varepsilon \left[ \frac{\langle BxB', BxB^* + B^*xB' + t^*(BxB'') \rangle}{\|B \times B'\|} \right] \\
 &= \|BxB'\| + \varepsilon \left( \frac{\langle BxB', BxB^* + B^*xB' + t^*(BxB'') \rangle}{\|BxB'\|} \right) \\
 q_{A_1} &= \frac{\|BxB'\| + \frac{\varepsilon}{\|BxB'\|} \left[ \|B'\|^2 \langle B, B^* \rangle + \|B'\|^2 \langle B', B^* \rangle - \langle B, B' \rangle (\langle B, B^* \rangle + \langle B', B^* \rangle) + t^* [\|B\|^2 \langle B', B'' \rangle - \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle] \right]}{\|B\| + \varepsilon \langle B, B^* + t^*B' \rangle}
 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
 q_{A_1} &= \frac{\|BxB'\|}{\|B\|} + \\
 \varepsilon &\left[ \frac{\|B'\|^2}{\|B\|} \langle B, B^* \rangle + \|B\| \langle B', B^* \rangle - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|} (\langle B, B^* \rangle + \langle B', B^* \rangle) \right] \\
 &+ t^* \left[ \begin{aligned} &\left[ \|B\| \langle B', B'' \rangle - \frac{\langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle}{\|B\|} \right] - \frac{\|BxB'\|}{\|B\|^2} \langle B, B^* \rangle \\ &- \frac{\|BxB'\|}{\|B\|^2} \langle B, B' \rangle \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{A_1} &= \langle A'_1, A_3 \rangle = \langle A'_1, A_1 \times A_2 \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B}, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \chi \left( \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right) \right\rangle \\
 &= \left[ \frac{\hat{B}x\hat{B}'}{\|\hat{B}\|^2} \right]^{-1} \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B}, \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} \chi \left( \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right) \right\rangle \\
 &= \frac{\|\hat{B}\|^2}{\hat{B}x\hat{B}'} \frac{1}{\|\hat{B}\|^3} \left\langle \hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} \hat{B}, \hat{B} \chi \left( \hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} \hat{B} \right) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \left[ \left\langle \hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} \hat{B}, \hat{B} \chi \hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} \hat{B} \chi \hat{B} \right\rangle \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi ;

$$A'_2 = \left[ \frac{\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]' = \left[ \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\|}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]'$$

yazılabilir. Burada öncelikle bazı türevleri alalım.

$$\begin{aligned} \|\hat{B}\|' &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|} \text{ idi.} \\ \|\hat{B}x\hat{B}'\|' &= \frac{\langle \hat{B}x\hat{B}', (\hat{B}x\hat{B}')' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} = \frac{\langle \hat{B}'x\hat{B} + \hat{B}x\hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\ &= \frac{\langle \hat{B}x\hat{B}', \hat{B}x\hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \text{ olur. O halde;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_2 &= \frac{(\hat{B}'' \cdot \|\hat{B}\| + \hat{B}' \cdot \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|}) \|\hat{B}x\hat{B}'\| - \hat{B}' \|\hat{B}\| \cdot \left[ \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \\ &\quad - \frac{[(\|\hat{B}'\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle) \hat{B} + \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}'] \|\hat{B}\| \cdot \|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2 \cdot \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^2 \cdot \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \cdot k \end{aligned}$$

olur. Burada  $k = \left[ \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|} \|\hat{B}x\hat{B}'\| + \|\hat{B}\| \cdot \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]$  dir. Sadeleştirirsek;

$$\begin{aligned} A'_2 &= \frac{\hat{B}'' \|\hat{B}\| + \frac{\hat{B}' \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|}}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\| \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\| \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} \\ &\quad - \frac{(\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle) \hat{B} + \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}'}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \\ &\quad + \left( \frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\| [\|\hat{B}\| \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle]}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} \right) \hat{B} \\ &= \frac{\|\hat{B}\| \hat{B}''}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \left[ \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^3 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\|\hat{B}\| \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right] \cdot \hat{B}' \\ &\quad + \left[ \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{(\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^3 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right] \hat{B} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$A'_2 = p_{A_2} A_1 + q_{A_2} A_2 + r_{A_2} A_3$$

yazdığımızda;

$$\left. \begin{aligned} p_{A_2} &= \langle A'_2, A_1 \rangle \\ q_{A_2} &= \langle A'_2, A_2 \rangle \\ r_{A_2} &= \langle A'_2, A_3 \rangle \end{aligned} \right\}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
 p_{A_2} &= \langle A'_2, A_1 \rangle = \langle A'_2, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \rangle \\
 &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \\
 &- \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{(\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \\
 &+ \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\
 &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} (\langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle) - \frac{\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\
 &= \frac{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4 - \|\hat{B}\|^4 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} = \frac{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \\
 &\frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3}
 \end{aligned}$$

Böylece  $p_{A_2} = \frac{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} (\langle \hat{B} - \hat{B}', \hat{B}'' \rangle)$  bulunur.

Şimdi  $q_{A'_2}$  yi bulalım:

$$\begin{aligned}
 q_{A_2} &= \langle A'_2, A_2 \rangle = \langle A'_2, \frac{\|\hat{B}\|}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \hat{B} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \hat{B} \rangle \\
 &= \frac{\|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \langle \hat{B}'', \hat{B}' \rangle + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} - \frac{\|\hat{B}\|^4 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} + \\
 &\frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} - \\
 &\frac{(\|\hat{B}'\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} + \\
 &\frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} + \\
 &\frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} + \frac{(\|\hat{B}'\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \\
 &= - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \\
 &- \frac{\|\hat{B}\|^4 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}'\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} \\
 &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} \left[ \frac{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}'\|^2 - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \right] - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \\
 &+ \frac{\langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4} \left[ \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 - \|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}'\|^2}{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \right] + \frac{\langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} = 0
 \end{aligned}$$

bulunur.

O halde  $q_{A_2} = 0$  dir. Şimdi  $r_{A_2}$  yi bulalım.

$$\begin{aligned}
 r_{A_2} &= \langle A'_2, A_3 \rangle = \langle A'_1, A_1 x A_2 \rangle \\
 &= \langle A'_2, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \left( \frac{\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3}}{\left| \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3} \right|} \right) \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle A'_2, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \left( \frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}\|} \right) \rangle \\
 &= \langle A'_2, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \left( \frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \right) \rangle \\
 &= \langle A'_2, \frac{\hat{B} \times \hat{B}'}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \rangle \\
 &= \frac{\|\hat{B}\|}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \det[\hat{B}, \hat{B}', \hat{B}'']
 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi  $p_{A_3}$ ,  $q_{A_3}$  ve  $r_{A_3}$  katsayılarını bulalım. Bunun için  $A'_3$  elde etmeliyiz

$$\begin{aligned}
 A'_3 &= A'_1 \times A_2 + A_1 \times A'_2 \\
 &= \left( \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right) \times \left( \frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \right) + \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times A'_2 \\
 &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B} \times \hat{B}'}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \hat{B} \times \hat{B}' + \frac{\hat{B} \times \hat{B}''}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|} + \\
 &+ \left[ \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \right] \hat{B} \times \hat{B}' \\
 &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \hat{B} \times \hat{B}' = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle - \|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \hat{B} \times \hat{B}'
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre katsayılar

$$p_{A_3} = \langle A'_3, A_1 \rangle$$

$$q_{A_3} = \langle A'_3, A_2 \rangle$$

$$r_{A_3} = \langle A'_3, A_3 \rangle$$

olacağından

$$p_{A_3} = \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B} \rangle = 0$$

bulunur. O halde;  $p_{A_3} = 0$  olur.

$$\begin{aligned}
 q_{A_3} &= \langle A'_3, A_2 \rangle \\
 &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \left[ \frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2 \|\hat{B}\|} \right] \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur ve son olarak ;

$$\begin{aligned}
 r_{A_3} &= \langle A'_3, A_3 \rangle = \langle A'_3, A_1 \times A_1 \rangle \\
 &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \rangle \\
 &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B} \times \hat{B}' \rangle \\
 &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2}
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde matris ile gösterelim:

$$\begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{A_1} & q_{A_1} & r_{A_1} \\ p_{A_2} & q_{A_2} & r_{A_2} \\ p_{A_3} & q_{A_3} & r_{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} & 0 \\ \frac{-\|\hat{B} \times \hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} + \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}\|^3} \langle \hat{B} - \hat{B}', \hat{B}'' \rangle & 0 & \frac{\|\hat{B}\| \det[\hat{B}, \hat{B}', \hat{B}'']}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \\ 0 & 0 & \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Böylece Blashke çatının türev denklemleri elde edilmiş olur.

## REFERANSLAR

- Farin, G. (1990). *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide*, 2nd edition, San Diago : Academic Press Inc.
- Farouki, R. (1985). Exact offset procedures for simple solids. *Computer Aided Geometric Design*, 2 (4), 257-279.
- Gursoy, O. (1992). Some Results on Closed Ruled Surfaces and Closed space Curves *Mech. Mach. Theory* , 27, 323-330
- Gursoy, O. ve Küçük, A. (1999). On the Invariants of Trajectory Surfaces, *Mech. Mach. Theory* , 34, 587-597.
- Gursoy, O. ve Küçük, A. (2004). On the Invariants of Bertrand Trajectory Surfaces Offsets, *Applied Mathematics and Computation*, 151 (3), 763-773.
- Güler, F. ve Kasap, E. (2018). A path planning method for robot end effector motion using the curvature theory of the ruled surfaces, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 15 1850048.
- Hacısalihoglu, H. H. (1983), *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Hacısaliholu, H. H. (1972). On the pitch of a ruled surface, *Mech. Mach. Theory*, Great Britain 7 (1972) 291–305, doi: 10.1016/0094-114X(72)90039-0.
- Hathout, F., Bekar, M. ve Yaylı, Y.( 2017). Ruled surfaces and tangent bundle of unit 2- sphere, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 14 1750145.
- Hoschek, J. (1985). Offset curves in the plane, *Computer Aided Design*, 17 (2) , 77-82.
- Hartshorne, R. (1967). *Foundations of Projective Geometry*, Newyork :W.A. Benjamin, Inc..
- İncesu, M. (2003). *Bezier Eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Sayısal Algoritmalar*, Yük. Lis. Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Karadeniz Teknik Üniversitesi ,Trabzon,
- Incesu, M. ve Gursoy, O. (2004). *Bezier Yüzeylerinde Esas Formlar ve eğrilikler*, XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Bolu,146-157.
- Ören, İ., ve İncesu, M. (2020). Recognition of complex polynomial Bezier curves under similarity transformations. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1377-1388
- Kazaz, M., Özdemir, A. ve Güroğlu, T. (2008). On the determination of a developable timelike ruled surface, *SDÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-Dergi)*, 3 (1), 72-79



## *Dual Değişkenli Küresel Bézier Eğrilerinde Blashke Çatı*

- Nešović, E., Öztürk, U., Öztürk, E. B. K. ve İlarıslan, K. (2016). On ruled surfaces with pseudo null base curve in Minkowski 3-space, *Int. Electron. J. Geom.* 9 (2), 9–20.
- Potmann, H. (1995). Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, 12, 175-192.
- Samancı, H. K., Celik, S. ve İncesu, M. (2015). The Bishop frame of Bézier curves. *Life Sci. J.*, 12(6), 175-180.
- Samancı, H. K., İncesu, M. (2020). Investigating a quadratic Bezier curve due to NCW and N-Bishop frames. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 12(2), 120-127.
- Samancı, H. K. (2021). The Serret Frenet Frame of the Rational Bezier Curves in the Euclidean -3 Space by Algorithm Method, *Journal of Science & Arts*, 21(3),721-748.
- Tekgöl F. (2024). *Projektif Düzlemde Bezier Eğrileri*, Yük. Lis. Tezi, Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş.
- Taş, F. (2016). A method of determining dual unit spherical B'ezier curves and line surfaces, *J. Logic Math. Linguistics Appl. Sci.*, 1, 1–6. 46
- Taş, F. ve Gürsoy, O.( 2018.) On the line congruences, *Int. Electron. J. Geom.* 11 (2), 47– 53.
- Taş, F. ve İlarıslan, K. (2019). A new approach to design the ruled surface, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol.*, 16 (6), 1950093 (16 pages)

# BÖLÜM 4

## CONFORMABLE BOUSSINESQ-DOUBLE SINH-GORDON DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ\*

*Derya UĞUN<sup>1</sup>*

*Orkun TAŞBOZAN<sup>2</sup>*

1 Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Enformatik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Mezunlu, Orcid: 0000-0003-3516-4147, derya-ugun@gmail.com

2 Doç. Dr., Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay/TÜRKİYE, Orcid: 0000-0001-5003-6341, otasbozan@mku.edu.tr

\* Bu çalışma Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalında Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN tarafından yönetilen ve Derya UĞUN tarafından yazılan "Conformable Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri" başlıklı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

## **Giriş**

Son birkaç yılda, lineer olmayan diferansiyel denklemlerdeki ilgi odağı lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi oldu. Bu tür lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için birçok matematikçi ve fizikçi farklı yöntemler geliştirdi (Zulfiqar & Ahmad, 2021). Literatürde, üstel fonksiyon yöntemi (He, 1999) varyasyonel iterasyon yöntemi (Zulfiqar & Ahmad, 2020), sinüs-kosinüs yöntemi (Wazwaz, 2004), (G'/G)-açılım yöntemi (Akbar & ark., 2019), Adomian ayrıştırma yöntemi (Wazwaz, 2005) gibi çok sayıda yöntem yer almaktadır.

Kesirli diferansiyel denklemlerde kullanılan birçok kesirli türev yaklaşımı mevcuttur. Bu yaklaşımlardan, kolay tanımından dolayı tamsayı mertebeden türev ile ifade edilebilen ve temel matematikte yer alan türev formüllerini sağlayan conformable kesirli türev yaklaşımı daha çok tercih edilmektedir (Khalil & ark., 2014). Bu çalışmada ele alınan kesirli mertebeden diferansiyel denklemde bulunan kesirli türevler conformable kesirli türev olarak alındı.

Bu çalışmada, zaman değişkenine göre conformable anlamında kesirli mertebeden türev içeren Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümleri  $e^{-\phi(\xi)}$  yöntemi ile elde edildi.

Boussinesq-Double Sinh-Gordon denklemi birçok araştırmacı tarafından çeşitli analitik yöntemler kullanılarak çözüldü. 2005 yılında A.M. Wazwaz tanjant hiperbolik yöntemini kullanarak Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümlerini elde etti (Wazwaz, 2005). 2006 yılında Abdul-Majid Wazwaz, değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümünü buldu (Wazwaz, 2006). 2012 yılında, G. Ebadi ve arkadaşları, (G'/G)-açılım yöntemini kullanarak Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümlerini elde ettiler (Ebadi & ark., 2012). 2013 yılında A. Esen ve arkadaşları üstel fonksiyon yöntemin yardımıyla

Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümlerini elde ettiler (Esen & ark., 2013). 2019 yılında S. Yılmaz ve O. Tasbozan yardımcı denklem yöntemini kullanarak Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümlerini buldular (Yılmaz & Tasbozan, 2020).

### Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı

**Tanım 1:**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  ve  $p \in (0,1)$  olmak üzere  $p$ -inci mertebeden bir  $f$  fonksiyonunun conformable kesirli mertebeden türev yaklaşımı

$$T_p(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-p}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde dir. Eğer  $a > 0$  olmak üzere  $(0, a)$  açık aralığında  $f(t)$  fonksiyonu  $p$ -inci mertebeden diferansiyellenebilir ve  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(p)}(t)$  limiti mevcut ise

$$f^{(p)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(p)}(t)$$

eşitliği geçerlidir (Khalil & ark., 2014).

**Teorem 1:**  $p \in (0, 1]$  ve  $f, g$  fonksiyonları  $t > 0$  noktasında  $p$ -inci mertebeden diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

- 1) Her  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $T_p(af(t) + bg(t)) = aT_p(f(t)) + bT_p(g(t))$ ,
- 2) Her  $q \in \mathbb{R}$  için  $T_p(t^q) = qt^{q-p}$ ,
- 3) Her  $f(t) = d$  sabit fonksiyonu için  $T_p(d) = 0$ ,
- 4)  $T_p(f(t)g(t)) = f(t)T_p(g(t)) + g(t)T_p(f(t))$ ,
- 5)  $T_p\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)T_p(f(t)) - f(t)T_p(g(t))}{[g(t)]^2}$ ,

$$6) T_p(f(t)) = t^{1-p} \frac{df(t)}{dt}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır (Khalil & ark., 2014).

### $e^{-\phi(\xi)}$ Analitik Yöntemi

$e^{-\phi(\xi)}$  yöntemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, son zamanlarda, birçok araştırmacı tarafından conformable kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde etmek için kullanıldı (Hosseini & ark., 2017; Rezazadeh & ark., 2018).

$e^{-\phi(\xi)}$  yöntemi ile conformable kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözülebilmesi için aşağıdaki adımlar izlenir (Alam & ark., 2015).

**I. Adım:**  $t$  zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$Q \left( \frac{\partial^p u}{\partial t^p}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \dots \right) = 0 \quad (1)$$

şekindedir. Burada  $Q$  lineer olmayan bir fonksiyon ve  $p \in (0,1)$  olmak üzere  $\frac{\partial^p u}{\partial t^p}$  türevi de  $u(x,t)$  fonksiyonunun  $t$  zaman değişkenine göre  $p$  -inci mertebeden conformable kesirli türevini temsil eder.

**II. Adım:** (1) ile verilen denklemde

$$u(x, t) = U(\xi)$$

ve  $w$  dalga hızı olmak üzere

$$\xi = x + w \frac{t^p}{p}$$

şeklinde dalga dönüşümünü kullanılırsa, (1) denklemi

$$G(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (2)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüşür.

**III. Adım:** (2) adi türevli diferansiyel denkleminin

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (e^{-\phi(\xi)})^n \quad (3)$$

biçiminde analitik çözümü aranır. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$  olmak üzere  $a_i$  katsayıları belirlenecek olan katsayılar olup,  $\phi(\xi)$  fonksiyonu ise

$$\phi'(\xi) = e^{-\phi(\xi)} + \mu e^{\phi(\xi)} + \lambda \quad (4)$$

adi türevli diferansiyel denkleminin çözümleridir. (4) ile verilen diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$\mu \neq 0$ ,  $\lambda^2 - 4\mu > 0$  olmak üzere

$$\phi_1(\xi) = \ln \left( \frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + C)\right) - \lambda}{2\mu} \right), \quad (5)$$

$\mu \neq 0$  ,  $\lambda^2 - 4\mu < 0$  olmak üzere

$$\phi_2(\xi) = \ln \left( \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left( \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + C) \right) - \lambda}{2\mu} \right), \quad (6)$$

$\mu = 0$  ,  $\lambda \neq 0$  ve  $\lambda^2 - 4\mu > 0$  olmak üzere

$$\phi_3(\xi) = -\ln \left( \frac{\lambda}{e^{\lambda(\xi+C)} - 1} \right), \quad (7)$$

$\mu \neq 0$  ,  $\lambda \neq 0$  ,  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  olmak üzere

$$\phi_4(\xi) = \ln \left( -\frac{2(\lambda(\xi + C) + 2)}{\lambda^2(\xi + C)} \right), \quad (8)$$

$\mu = 0$  ,  $\lambda = 0$  ,  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  olmak üzere

$$\phi_5(\xi) = \ln(\xi + C) \quad (9)$$

şeklindedir.

(3) ile verilen denklemde bulunan  $n$  pozitif tamsayısı homojen denge olarak adlandırılan eşitlik yardımı ile bulunur. Bu eşitliği elde etmek için (3) denklemindeki lineer olan en yüksek mertebeden türev içeren terim  $s = 0,1,2, \dots$  için

$$\mathcal{O}\left(\frac{d^s U}{d\xi^s}\right) = n + s,$$

olarak ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim  $s = 0,1,2, \dots$  ve  $q = 0,1,2, \dots$  için

$$\mathcal{O}\left(U^q \frac{d^s U}{d\xi^s}\right) = (q + 1)n + s$$

şeklinde yazılarak, elde edilen ifadeler birbirine eşitlenir (Lai & ark., 2009). Eşitlenen bu ifadelerden  $n$  pozitif değeri bulunur. Böylece, homojen denge yardımı ile elde edilen  $n$  pozitif tamsayısının (3) eşitliğinde kullanılması ile birlikte (2) adi türevli diferansiyel denklemin katsayıları daha sonra belirlenecek olan  $U(\xi)$  analitik çözümü belirlenmiş olur.

**IV. Adım:** (3) eşitliği ve bu eşitliğin gerekli türevleri (4) denklemi yardımıyla elde edildikten sonra (2) denkleminde yerlerine yazılmasıyla  $e^{-\phi(\xi)}$  kuvvetlerini içeren bir ifade elde edilir. Elde edilen ifadede bulunan  $e^{-\phi(\xi)}$  terimlerinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenmesi ile bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sisteminde bulunan  $\lambda, \mu, w, a_i$  değerleri Wolfram Mathematica yardımıyla çözümlenerek bulunur. Elde edilen değerler ve (5)-(9) ile verilen formüllerin kullanılmasıyla (1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümleri elde edilir.



## Conformable Boussinesq-Double Sinh-Gordon Denkleminin Analitik Çözümleri

Conformable kesirli mertebeden Boussinesq-Double Sinh-Gordon denklemi

$$\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sinh(u) + \frac{3}{2} \sinh(2u) \quad (10)$$

şeklindedir. Burada,  $p \in (0,1)$  olmak üzere,  $\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}}$  ifadesi  $u(x,t)$  fonksiyonunun  $t$  zaman değişkenine göre  $2p$ -inci meretebeden conformable türevini göstermektedir. (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden kısmi türevli denkleme

$$\xi = x + w \frac{t^p}{p} \quad (11)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$(w^2 - \alpha)u'' + u^{(iv)} = \sinh(u) + \frac{3}{2} \sinh(2u) \quad (12)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. (12) adi türevli diferansiyel denklemine

$$v = e^u \quad (13)$$

dönüşümü uygulanır ve

$$\sinh(u) = \frac{v - v^{-1}}{2} \quad (14)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -3v^2 - 2v^3 + 2v^5 + 3v^6 + (4w^2 - 4\alpha)v^2v'^2 + 24v'^4 - 4w^2v^3v'' + \\ & 4\alpha v^3v'' - 48k^4vv'^2v'' + 12v^2v''^2 + 16v^2v'v''' - 4v^3v^{(iv)} = \\ & 0 \end{aligned} \quad (15)$$

eşitliği bulunur.  $u(x, t)$  ile  $v(x, t)$  arasındaki bağıntı ise (13) eşitliğinden

$$u = \ln v \quad (16)$$

olarak bulunur. (15) ile verilen denklemdaki en yüksek mertebeden türev içeren  $v^3v^{(iv)}$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan  $v^6$  terimi arasından

$$3n + n + 4 = 6n$$

eşitliği elde edilir ki, buradan

$$n = 2$$

olarak bulunur. Böylece (15) ile verilen adi türevli diferansiyel denklemin

$$v(\xi) = a_0 + a_1e^{-\phi(\xi)} + a_2(e^{-\phi(\xi)})^2 \quad (17)$$

şeklinde analitik çözümü aranır. (17) ve (13) eşitliklerinden faydalanarak, (15) denkleminde bulunan  $v(\xi)$  ifadesinin türevleri

$$v'(\xi) = -2a_2e^{-3\phi(\xi)} + e^{-2\phi(\xi)}(-a_1 - 2a_2\lambda) - a_1\mu + e^{-\phi(\xi)}(-a_1\lambda - 2a_2\mu)$$

$$v''(\xi) = 6a_2e^{-4\phi(\xi)} + e^{-3\phi(\xi)}(2a_1 + 10a_2\lambda) + a_1\lambda\mu + 2a_2\mu^2 + e^{-2\phi(\xi)}(3a_1\lambda + 4a_2\lambda^2 + 8a_2\mu) + e^{-\phi(\xi)}(a_1\lambda^2 + 2a_1\mu + 6a_2\lambda\mu)$$

$$v'''(\xi) = -24a_2e^{-5\phi(\xi)} + e^{-4\phi(\xi)}(-6a_1 - 54a_2\lambda) - a_1\lambda^2\mu - 2a_1\mu^2 - 6a_2\lambda\mu^2 + e^{-3\phi(\xi)}(-12a_1\lambda - 38a_2\lambda^2 - 40a_2\mu) + e^{-2\phi(\xi)}(-7a_1\lambda^2 - 8a_2\lambda^3 - 8a_1\mu - 52a_2\lambda\mu) + e^{-\phi(\xi)}(-a_1\lambda^3 - 8a_1\lambda\mu - 14a_2\lambda^2\mu - 16a_2\mu^2)$$

$$v^{(iv)}(\xi) = 120a_2e^{-6\phi(\xi)} + e^{-5\phi(\xi)}(24a_1 + 336a_2\lambda) + a_1\lambda^3\mu + 8a_1\lambda\mu^2 + 14a_2\lambda^2\mu^2 + 16a_2\mu^3 + e^{-4\phi(\xi)}(60a_1\lambda + 330a_2\lambda^2 + 240a_2\mu) + e^{-3\phi(\xi)}(50a_1\lambda^2 + 130a_2\lambda^3 + 40a_1\mu + 440a_2\lambda\mu) + e^{-2\phi(\xi)}(15a_1\lambda^3 + 16a_2\lambda^4 + 60a_1\lambda\mu + 232a_2\lambda^2\mu + 136a_2\mu^2) + e^{-\phi(\xi)}(a_1\lambda^4 + 22a_1\lambda^2\mu + 30a_2\lambda^3\mu + 16a_1\mu^2 + 120a_2\lambda\mu^2)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu türevler ve (17) eşitliğinin (15) ile verilen denklemden yerlerine yazılıp, gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla  $e^{-\phi(\xi)}$  teriminin kuvvetlerinin katsayılarından oluşan denklem sisteminin çözümlenmesiyle, birinci çözüm ailesinden elde edilen parametreler

$$a_2 = 4, \alpha = w^2 - 3, a_1 = -4\sqrt{a_0}, \lambda = -\sqrt{a_0}, \mu = \frac{a_0 - 1}{4} \quad (18)$$

şeklinde, ikinci çözüm ailesinden elde edilen parametreler

$$a_2 = 4, \alpha = w^2 + 1, a_1 = -4\sqrt{a_0}, \lambda = -\sqrt{a_0}, \mu = \frac{a_0 + 1}{4} \quad (19)$$

olarak, üçüncü çözüm ailesinden elde edilen parametreler

$$a_2 = 4, \alpha = w^2 - 3, a_1 = 4\sqrt{a_0}, \lambda = \sqrt{a_0}, \mu = \frac{a_0 - 1}{4} \quad (20)$$

şeklinde olup, dördüncü çözüm ailesinden elde edilen parametreler ise

$$a_2 = 4, \alpha = w^2 + 1, a_1 = 4\sqrt{a_0}, \lambda = \sqrt{a_0}, \mu = \frac{a_0 + 1}{4} \quad (21)$$

olarak bulunur. (18) ile bulunan parametre değerlerinin, (11) dalga dönüşümünün ve (14)-(18) analitik çözümlerinin (17) ile verilen denklemde yerlerine yazılmasıyla,  $v(x, t)$  analitik çözümleri

$$v_1(x, t) = a_0 + \frac{(a_0 - 1)^2}{\left(\sqrt{a_0} - \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w\frac{t^p}{p}\right)\right)\right)^2} - \frac{2\sqrt{a_0}(a_0 - 1)}{\sqrt{a_0} - \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w\frac{t^p}{p}\right)\right)},$$

$$v_2(x, t) = 1 + \frac{4}{\left(-1 + e^{-\left(x + w\frac{t^p}{p}\right)}\right)^2} + \frac{4}{-1 + e^{-\left(x + w\frac{t^p}{p}\right)}}$$

olarak bulunur. (16) ile verilen formülün kullanılmasıyla, (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümleri

$$u_1(x, t) = \ln \left( a_0 + \frac{(a_0 - 1)^2}{\left( \sqrt{a_0} - \tanh \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right) \right)^2} - \frac{2\sqrt{a_0}(a_0 - 1)}{\sqrt{a_0} - \tanh \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right)} \right),$$

$$u_2(x, t) = \ln \left( 1 + \frac{4}{\left( -1 + e^{-\left( x + w \frac{t^p}{p} \right)} \right)^2} + \frac{4}{-1 + e^{-\left( x + w \frac{t^p}{p} \right)}} \right)$$

şeklinde elde edilir. (19) ile bulunan parametre değerlerinin, (4.1.2) dalga dönüşümünün ve (14)-(18) analitik çözümlerinin (17) ile verilen denklemde yerlerine yazılmasıyla,  $v(x, t)$  analitik çözümü

$$v_3(x, t) = 1 + \frac{4}{\left( 1 + \tan \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right) \right)^2} - \frac{4}{1 + \tan \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right)}$$

olarak bulunur. (16) formülünün kullanılmasıyla, (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümü

$$u_3(x, t) = \ln \left( 1 + \frac{4}{\left( 1 + \tan \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right) \right)^2} - \frac{4}{1 + \tan \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right)} \right)$$

olarak bulunur. (20) ile bulunan parametre değerlerinin, (11) dalga dönüşümünün ve (14)-(18) analitik çözümlerinin (17) ile verilen denklemden yerlerine yazılmasıyla,  $v(x, t)$  analitik çözümleri

$$v_4(x, t) = a_0 + \frac{(a_0 - 1)^2}{\left( -\sqrt{a_0} - \tanh \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right) \right)^2} + \frac{2\sqrt{a_0}(a_0 - 1)}{-\sqrt{a_0} - \tanh \left( \frac{1}{2} \left( x + w \frac{t^p}{p} \right) \right)},$$

$$v_5(x, t) = 1 + \frac{4}{\left(-1 + e^{\left(x+w\frac{t^p}{p}\right)}\right)^2} + \frac{4}{-1 + e^{\left(x+w\frac{t^p}{p}\right)}}$$

olarak bulunur. (16) formülünün kullanılmasıyla, (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümleri

$$u_4(x, t) = \ln \left( a_0 + \frac{(a_0 - 1)^2}{\left(-\sqrt{a_0} - \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w\frac{t^p}{p}\right)\right)\right)^2} + \frac{2\sqrt{a_0}(a_0 - 1)}{-\sqrt{a_0} - \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w\frac{t^p}{p}\right)\right)} \right)$$

$$u_5(x, t) = \ln \left( 1 + \frac{4}{\left(-1 + e^{\left(x+w\frac{t^p}{p}\right)}\right)^2} + \frac{4}{-1 + e^{\left(x+w\frac{t^p}{p}\right)}} \right)$$

şekindedir. (21) ile bulunan parametre değerlerinin, (11) dalga dönüşümünün ve (14)-(18) analitik çözümlerinin (17) ile verilen denklemde yerlerine yazılmasıyla,  $v(x, t)$  analitik çözümü

$$v_6(x, t) = a_0 + \frac{(a_0 + 1)^2}{\left(-\sqrt{a_0} + \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w \frac{t^p}{p}\right)\right)\right)^2} + \frac{2\sqrt{a_0}(a_0 + 1)}{-\sqrt{a_0} + \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w \frac{t^p}{p}\right)\right)}$$

olarak bulunur. (16) formülünün kullanılmasıyla, (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Boussinesq-Double Sinh-Gordon denkleminin analitik çözümleri

$$u_6(x, t) = \ln \left( a_0 + \frac{(a_0 + 1)^2}{\left(-\sqrt{a_0} + \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w \frac{t^p}{p}\right)\right)\right)^2} + \frac{2\sqrt{a_0}(a_0 + 1)}{-\sqrt{a_0} + \tanh\left(\frac{1}{2}\left(x + w \frac{t^p}{p}\right)\right)} \right)$$

şeklindedir.



## KAYNAKLAR

- Akbar MA, Norhashidah M, Islam MT. (2019). Multiple closed form solutions to some fractional order nonlinear evolution equations in physics and plasma physics. *AIMS Mathematics*, 4(3), 397–411.
- Alam, M. N., Hafez, M.G., Akbar, M.A., Roshid, H.O. (2015). Exact Solutions to the (2+1)-Dimensional Boussinesq Equation via  $\exp(-\varphi(\xi))$ -Expansion Method. *Journal of Scientific Research*, 7(3), 1-10.
- Ebadi, G., Mojaver, A., Johnson, S., Kumar, S., Biswas, A. (2012). Dynamics of dispersive topological solitons and its perturbations. *Indian Journal of Physics*, 86(12), 1115-1129.
- Esen, A., Tasbozan, O., Kutluay, S. (2013). Applications of the Exp-function Method for the MkdV-Sine-Gordon and Boussinesq-double Sine-Gordon Equations. *World Applied Sciences Journal*, 22(1), 147-151.
- He J-H. ,1999. Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique some examples. *Int J Non Linear Mech.*, 4, 699–708.
- Hosseini, K., Bekir, A., Ansari, R., (2017). Exact solutions of nonlinear conformable time-fractional Boussinesq equations using the  $(-\Phi(\xi))$ -expansion method. *Optical and Quantum Electronics*, 49 (4), 1-11.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.

- Lai, S., Lv, X., Shuai, M. (2009). The Jacobi elliptic function solutions to a generalized Benjamin–Bona–Mahony equation. *Mathematical and computer Modelling*, 49, 369-378.
- Rezazadeh, H., Tariq, H., Eslami, M., Mirzazadeh, M., Zhou, Q. (2018). New exact solutions of nonlinear conformable time-fractional Phi-4 equation. *Chinese Journal of Physics*, 56(6), 2805-2816.
- Wazwaz, A.M. A. (2004). Sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. *Math Comput Modell*, 40(5), 499–508.
- Wazwaz, A-M. (2005). Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Emden–Fowler equation. *Appl Math Comput.*, 161, 543–60.
- Wazwaz, A. M. (2005). Exact solutions to the double sinh-Gordon equation by the tanh method and a variable separated ODE method. *Computers & Mathematics with Applications*, 50, 1685-1696.
- Wazwaz, A.M. (2006). The variable separated ODE method for travelling wave solutions for the Boussinesq-double sine-Gordon and the Boussinesq-double sinh-Gordon equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72, 1-9.
- Yılmaz, S., Tasbozan O. (2020). Analytical Solutions of Conformable Boussinesq-Double-Sinh-Gordon and First Boussinesq-Liouville Equations with the Help of Auxiliary Equation Method. *Ikonion Journal of Mathematics*, 2, 40-54.
- Zulfiqar, A., Ahmad, J. (2021). New optical solutions of conformable fractional perturbed Gerdjikov-Ivanov equation in mathematical nonlinear optics. *Results in Physics*, 21, 103825.

Zulfiqar A, Ahmad J. (2020). Soliton solutions of fractional modified unstable Schrodinger equation using Exp-function method. *Results Phys*,19, 103476.

# BÖLÜM 5

## 3 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİ

*İlim KİŞİ<sup>1</sup>*

*Sezgin BÜYÜKKÜTÜK<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Kocaeli, Türkiye

<sup>2</sup> Kocaeli Üniversitesi Gölcük Meslek Yüksekokulu, Gölcük-Kocaeli, Türkiye

## GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğri ve yüzey kavramları, temel ve önemli bir yer tutmaktadır. Yüzeylerin oluşturulmasında çeşitli yöntemler bulunmakta olup, bunlardan biri birden fazla eğrinin parametrisasyonunun birlikte kullanılmasıdır. Örneğin, öteleme yüzeyleri, çarpanlara ayrılabilir yüzeyler ve küresel çarpım yüzeyleri, bu tür bir yaklaşımla elde edilen yüzeyler arasında yer almaktadır [2, 5, 6, 20].

Çarpım uzaylarının gömmeleri kavramı Kuiper tarafından  $g: M \rightarrow \mathbb{E}^{m+d}$  ve  $h: S^n \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$  fonksiyonları için

$$\Phi(s, t) = (g_1(s), g_2(s), \dots, g_{m+d-1}(s), g_{m+d}(s), h(t))$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $M$ , bir  $m$ -boyutlu manifold ve  $S^n$  de  $n$ -küre olup  $t \in S^n$  dir. [3] ve [4] numaralı çalışmalarda yazarlar, bu şekildeki gömmeleri dönel gömmeler olarak adlandırmışlar ve  $m = n = 1$  ve  $d = 1, 2$  olarak bu gömmelerin özel bir hali olan küresel çarpım yüzeylerini çalışmışlardır.  $m = n = 1$  ve  $d = 1$  için  $C_1(s) = (g_1(s), g_2(s))$  ve  $C_2(t) = (h_1(t), h_2(t))$  gibi iki düzlemsel eğri yardımı ile Öklidyen 3- uzayda küresel çarpım yüzeyini

$$C_1(s) \otimes C_2(t) = (g_1(s), g_2(s)h_1(t), g_2(s)h_2(t)) \quad (1)$$

parametrisasyonu ile vermişlerdir [3, 4]. Daha sonra, bu tür yüzeyler, Öklidyen, Minkowski ve Galilean uzaylarda çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir [7, 15, 18]. Bu yüzeylerin arasında özel olanlar, dönel yüzeyler ve süperquadriklerdir [12, 14, 21]. Bu iki kavram geometride görsel örnekleri ile birlikte geniş yer tutar.

(1) nolu eşitlikte  $C_2(t) = (\cos t, \sin t)$  alınarak dönel yüzey ile karşılaştırılır. Bunlardan bazıları, regle yüzeyler, açılabilir yüzeyler, helikoid, kanal yüzeyleri, tüp yüzeyi ve katenoidtir. Bu yüzeylerin farklı disiplinlerde birçok uygulaması mevcuttur [10, 13, 17, 19, 22].

Özellikle başka bir formda olan süperquadrikler, süperelips, süperhiperbol gibi eğrilerin küresel çarpımıyla elde edilir. Bu eğrilerin basit formları bilindiği üzere analitik geometride yer almaktadır. Bu küresel çarpımla elde edilen yüzeyler, süperelipsoid, tek kanatlı superhiperboloid, çift kanatlı süperhiperboloid ve toroidtir [14].

Öklidyen 3- uzaydaki bu tür yüzeylerin uygulama alanları mevcut olup bunlardan bazıları robotik, tıbbi görüntü analizi ve sanal ortamların otomatik olarak oluşturulmasıdır.

Bu çalışmada, küresel çarpım yüzeyleri Minkowski 3- uzayında ele alınmıştır. Öncelikle, sonraki bölümlerde hesaplamalarda da kullanılacak olan temel tanım ve bilgiler verilmiştir. Sonrasında, Minkowski 3- uzayında iki eğri yardımıyla küresel çarpım yüzeyi tanımlanarak bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilmiştir. Yüzeyin düz olması için yeter ve gerek koşul sunulmuş, minimal küresel çarpım yüzeyler ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Son olarak, minimal küresel çarpım yüzeyinin Gauss dönüşümü üzerine bazı sonuçlar verilmiştir. [8, 9, 16].

## 1. TEMEL KAVRAMLAR

1 indekse sahip, yarı-Öklidyen 3- uzayı olan  $\mathbb{IE}_1^3$  üzerinde Lorentz iç çarpımı

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_L = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - P_3 Q_3 \quad (2)$$

olarak belirlidir. (2) eşitliğinde  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  ,  
 $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3) \in \mathbb{IE}_1^3$  şeklindedir.  
 c sayısı pozitif olmak üzere

$$H_0^2(-c^2) = \{ \mathbf{P} \in \mathbb{IE}_1^3 : \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle_L = -c^2 \}$$

dir, ayrıca

$$S_1^2(c^2) = \{P \in \mathbb{IE}_1^3 : \langle P, P \rangle_L = c^2\}$$

ayrımı geçerlidir ve bu kümeler sırasıyla yarı-hiperbolik uzay ve yarı-Riemann uzayları temsil eder. Burada,  $H_0^2(-c^2)$  de-Sitter uzay zaman,  $S_1^2(c^2)$  ise Sitter uzay-zaman adlarıyla da anılır [13].

$P$ ,  $\mathbb{IE}_1^3$  de bir vektör olmak üzere  $\langle P, P \rangle_L = 0$  ( $P \neq 0$ ) içinnull (lightlike),  $\langle P, P \rangle_L > 0$  için spacelike,  $\langle P, P \rangle_L < 0$  içinse timelike olduğunu biliyoruz. Bu vektörün boyu,

$$\|P\|_L = \sqrt{|\langle P, P \rangle_L|}$$

ile hesaplanır [11].

$\langle P, Q \rangle_L = 0$  ifadesi gerçekleşirse bu vektörler ortonormaldir. Dahası,  $C'(s)$  hız vektörü, null, spacelike ya da timelike olduğunda eğri de null, spacelike ya da timelike olarak adlandırılır [11].

$\mathbb{IE}_1^n$  de bir spacelike eğrinin ya da timelike eğrinin birim hızlılığı  $\langle C'(s), C'(s) \rangle_L = \pm 1$  olması demektir. Lightlike koni ise

$$LC = \{P \in \mathbb{IE}_1^n, \langle P, P \rangle_L = 0\}$$

şeklindedir.

Yukarıdakine benzer bir tanımlamayla, Minkowski 3- uzayında yüzeyler de spacelike, timelike ve null gibi farklı üç kategoride değerlendirilir. Yüzeyin normal vektör alanı olan  $\eta$  spacelike ise yüzey timelike,  $\eta$  timelike ise yüzey spacelike olarak isimlendirilir.

S:  $\Phi(s, t)$  Minkowski 3- uzayında bir yüzey olsun. Bu durumda, yüzeyin teğet uzayı  $T(S)$  yi oluşturan vektör alanları  $\Phi_s$  ve  $\Phi_t$  olup 1. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
 e &= \langle \Phi_s, \Phi_s \rangle_L \\
 f &= \langle \Phi_s, \Phi_t \rangle_L \\
 g &= \langle \Phi_t, \Phi_t \rangle_L
 \end{aligned} \tag{3}$$

şeklinde olup 1. temel form matrisi

$$\mathbf{g}_{ij} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \tag{4}$$

dir. Dolayısıyla, 1. temel form

$$I = eds^2 + 2f ds dt + g dt^2$$

olarak yazılabilir [11]. Yüzeyin normal vektör alanı  $\eta(s, t), W = \langle \Phi_s \wedge_L \Phi_t, \Phi_s \wedge_L \Phi_t \rangle_L$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\Phi_s \wedge_L \Phi_t}{\sqrt{|W|}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

dir. 2. temel form katsayıları ise

$$\begin{aligned}
 \ell &= \langle \Phi_{ss}, \eta \rangle_L, \\
 \mathbf{n} &= \langle \Phi_{st}, \eta \rangle_L, \\
 \mathbf{m} &= \langle \Phi_{tt}, \eta \rangle_L,
 \end{aligned} \tag{6}$$

olmak üzere yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\mathbf{K} = - \frac{\ell \mathbf{n} - \mathbf{m}^2}{|\mathbf{eg} - f^2|} \tag{7}$$

ve



$$H = \frac{en - 2fm + g\ell}{2|eg - f^2|}, \quad (8)$$

olarak belirlidir [1].

## 2.MINKOWSKI 3-UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİ

Bu kısımda,  $IE_1^3$  Minkowski 3- uzayında küresel çarpım yüzeyleri tanımlanarak, bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilecektir.

$C_1, C_2: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow IE_1^2$ ,  $C_1(s) = (g_1(s), g_2(s))$ ,  $C_2(t) = (h_1(t), h_2(t))$ , şeklinde birim hızlı düzlemsel iki eğri olsun. Bu durumda  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerinin oluşturduğu S küresel çarpım yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{aligned} \Phi &= C_1 \otimes C_2: IE^2 \rightarrow IE^3 \\ \Phi(s, t) &= (g_1(s), g_2(s)h_1(t), g_2(s)h_2(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

şeklindedir [3].

Ayrıca  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri birim hızlı olduklarından  $g_1'^2(s) - g_2'^2(s) = 1$  ve

$h_1'^2(t) - h_2'^2(t) = 1$  dir.  $C_2(t) = (\sinh(t), \cosh(t))$  olarak alınırsa, (9) eşitliğinde  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen S küresel çarpım yüzeyi dönme eksenini spacelike eksen olan

$$\Phi(s, t) = (g_1(s), g_2(s) \sinh(t), g_2(s) \cosh(t))$$

dönel yüzeyine karşılık gelir. Şimdi (9) eşitliğinde  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen S küresel çarpım yüzeyinin teğet uzayını geren  $\Phi_s$  ve  $\Phi_t$  teğet vektörlerini elde edelim.

$$\Phi_s(s, t) = (g_1'(s), g_2'(s)h_1(t), g_2'(s)h_2(t))$$

$$\Phi_t(s, t) = (0, g_2(s)h_1'(t), g_2(s)h_2'(t)).$$

Burada  $g'_1(s)$ ,  $g'_2(s)$  sırasıyla  $g_1(s)$  ve  $g_2(s)$  fonksiyonlarının  $s$  ye göre türevlerini,  $h'_1(t)$  ve  $h'_2(t)$  de sırasıyla  $h_1(t)$  ve  $h_2(t)$  fonksiyonlarının  $t$  ye göre türevlerini göstermektedir. Bu durumda  $S$  küresel çarpım yüzeyinin birinci temel form katsayıları (3) eşitlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned} e &= g_1'^2(s) + g_2'^2(s) (h_1^2(t) - h_2^2(t)) \\ f &= g_2(s)g_2'(s)(h_1(t)h_1'(t) - h_2(t)h_2'(t)) \\ g &= g_2^2(s) \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de yüzeyin normal vektörünü elde edelim. Bunun için öncelikle  $\Phi_s \wedge_L \Phi_t$  vektörünü hesaplamamız gerekir.

$$\Phi_s \wedge_L \Phi_t = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ g'_1 & g'_2 h_1 & g'_2 h_2 \\ 0 & g_2 h'_1 & g_2 h'_2 \end{vmatrix} = (g_2 g'_2 (h_1 h'_2 - h'_1 h_2), -g'_1 g_2 h'_2, -g'_1 g_2 h'_1)$$

olup  $W = g_2^2 (g_2'^2 (h_1 h'_2 - h'_1 h_2)^2 - g_1'^2)$  dir. Buna göre (5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\sqrt{|W|}} (g_2 g'_2 (h_1 h'_2 - h'_1 h_2), \\ &- h'_1 h_2), -g'_1 g_2 h'_2, -g'_1 g_2 h'_1) \end{aligned} \quad (11)$$

olur. Şimdi de  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonunun ikinci kısmi türevlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \Phi_{ss}(s, t) &= (g_1''(s), g_2''(s)h_1(t), g_2''(s)h_2(t)) \\ \Phi_{st}(s, t) &= (0, g_2'(s)h_1'(t), g_2'(s)h_2'(t)) \\ \Phi_{tt}(s, t) &= (0, g_2(s)h_1''(t), g_2(s)h_2''(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

dir.

Böylece, (6), (11) ve (12) eşitlikleri kullanılarak  $\Phi(s, t)$  küresel çarpım yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= g_1''(s)g_2'(s) - g_1'(s)g_2''(s) \\ \Gamma(t) &= h_1(t)h_2'(t) \\ &- h_1'(t)h_2(t) \\ \mu(t) &= h_1'(t)h_2''(t) - h_1''(t)h_2'(t)\end{aligned}\tag{13}$$

fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{1}{\sqrt{|W|}}g_2(s)\lambda(s)\Gamma(t), \\ m &= 0; \\ n &= \frac{1}{\sqrt{|W|}}g_1'(s)g_2'^2(s)\mu(t)\end{aligned}\tag{14}$$

olarak elde edilir.

**Teorem:** S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$ parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. Bu yüzeyin Gauss ve otalama eğrilik fonksiyonları sırası ile

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{W^2} \{g_1'g_2^3\lambda(s)\Gamma(t)\mu(t)\},\end{aligned}\tag{15}$$

ve

$$\begin{aligned}H &= \frac{g_2^2}{2\sqrt{|W|}} \{g_1'(g_1'^2(s) + g_2'^2(s))\mu(t) \\ &+ g_2\lambda(s)\Gamma(t)\}\end{aligned}\tag{16}$$

eşitlikleri ile verilir.

**İspat:** S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. (10) eşitliklerinden  $eg - f^2$  sayısı

$$eg - f^2 = g_2^2(g_1'^2 - g_2'^2(h_1h_2' - h_1'h_2)^2) = -W \quad (17)$$

olarak elde edilir. (10), (14) ve (17) eşitlikleri, (7) ve (8) eşitliklerinde yerlerine yazılarak, (15) ve (16) eşitlikleri elde edilir.

**Teorem:** S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. S yüzeyinin düz yüzey olması için gerek ve yeter koşul  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerinden en az birisinin düz doğru olmasıdır.

**İspat:**  $K = 0$  olsun. (15) eşitliğinden  $g_1'g_2^3\lambda(s)\Gamma(t)\mu(t) = 0$ dır. Buradan  $\lambda(s) = 0$ ,  $\Gamma(t) = 0$ , veya  $\mu(t) = 0$  eşitliklerinden en az birisi sağlanır.  $\lambda(s) = 0$  olsun. (13) eşitliklerinden

$$g_1''(s)g_2'(s) - g_1'(s)g_2''(s) = 0$$

yani

$$\frac{g_1''(s)}{g_1'(s)} = \frac{g_2''(s)}{g_2'(s)} \quad (18)$$

olur. (18) diferansiyel denkleminin çözümü  $g_1(s) = sg_2(s) + c$  dir. Bu da  $C_1$  eğrisinin düz doğru olması anlamına gelir. Benzer mantıkla  $\Gamma(t) = 0$  ve  $\mu(t) = 0$  eşitliklerinden de  $C_2$  eğrisinin düz doğru olduğu sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem:** S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. S yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul

i)  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri orijinden geçmeyen düz doğrulardır,

ii)  $C_2$  eğrisi orijinden geçen bir düz doğrudur,

koşullarından birinin sağlanmasıdır.

**İspat:**  $H = 0$  olsun. (16) eşitliğinden  $g'_1(g'^2_1(s) + g'^2_2(s))\mu(t) + g_2\lambda(s)\Gamma(t) = 0$  dır. Buradan  $\mu(t) = 0$  ve  $\lambda(s) = 0$  veya  $\mu(t) = 0$  ve  $\Gamma(t) = 0$  elde edilir.  $\mu(t) = 0$  ise yukarıdaki ispata benzer mantıkla  $C_2$  eğrisi orijinden geçmeyen bir düz doğru olarak elde edilir. O halde  $\mu(t) = 0$  ve

$\lambda(s) = 0$  ise  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri birer orijinden geçmeyen düz doğru olurlar.  $\Gamma(t) = 0$  olsun. Bu durumda da (13) eşitliklerinden

$$h_1(t)h'_2(t) - h'_1(t)h_2(t) = 0$$

yani,

$$\frac{h'_1(t)}{h_1(t)} = \frac{h'_2(t)}{h_2(t)} \quad (19)$$

olur. (19) diferansiyel denkleminin çözümü  $h_1(t) = h_2(t)c$  dir. Bu da  $C_2$  eğrisinin orijinden geçen bir düz doğru olması anlamına gelir.

### 3. MINKOWSKI 3-UZAYINDA HARMONİK GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİ

Bu kısımda öncelikle  $IE_1^3$  Minkowski 3- uzayında verilen bir yüzeyin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümü ile ilgili kavramlar verilecek ve daha sonra  $C_2$  eğrisi orijinden geçen bir düz doğru olan yani minimal olan bir küresel çarpım yüzeyinin harmonik Gauss dönüşümüne sahip olması ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Öklidyen ve yarı-Öklidyen uzaylarda Riemann manifoldlarının sonlu tipte immersiyonları kavramı Chen tarafından 1970 li yılların sonlarında tanımlanmış ve daha sonra bu kavram alt manifoldların Gauss dönüşümlerine genişletilmiştir.

$IE_1^3$  uzayında bir S yüzeyinin Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|\det g_{ij}|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{|\det g_{ij}|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (20)$$

eşitliği ile verilir. Burada  $g_{ij}$  ler, 1. temel form matrisinin katsayıları ve  $g^{ij}$  ler ise, 1. temel form matrisinin tersi olan matrisin katsayılarıdır.  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında Gauss dönüşümü  $\eta$  ile verilen bir S yüzeyi  $\Delta\eta = f(\eta + C)$  şartını sağlarsa, noktasal 1-tipinde olarak adlandırılır. Burada f sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve C sabit bir vektördür. Eğer C sıfır ise  $\eta$ , 1. çeşit noktasal 1- tipinde, C sıfırdan farklı ise  $\eta$ , 2. çeşit noktasal 1- tipinde Gauss dönüşümüne sahiptir. f sıfır yani  $\Delta\eta = 0$  ise,  $\eta$  harmoniktir ve dolayısıyla S yüzeyi harmonik Gauss dönüşümüne sahiptir [8, 9, 16].

S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. S yüzeyinin 1. temel form matrisi (4) ve (10) eşitliklerinden

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_1'^2 + g_2'^2(h_1^2 - h_2^2) & g_2 g_2'(h_1 h_1' - h_2 h_2') \\ g_2 g_2'(h_1 h_1' - h_2 h_2') & g_2^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

olarak elde edilir. Bu matrisin determinanı  $\det g_{ij} = g_2^2(g_1'^2 - g_2'^2(h_1 h_2' - h_1' h_2)^2)$  dir. Bu aşamadan sonra  $C_2$  eğrisinin orijinden geçen bir düz doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $h_1(t)h_2'(t) - h_1'(t)h_2(t) = 0$  dir. O halde  $\sqrt{|\det g_{ij}|} = |g_2 g_2'|$  olur. Buna göre (21) matrisinin tersi

$$g^{ij} = \frac{1}{g_1'^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{g_2'}{g_2}(h_1 h_1' - h_2 h_2') \\ -\frac{g_2'}{g_2}(h_1 h_1' - h_2 h_2') & g_1'^2 + g_2'^2(h_1^2 - h_2^2) \end{bmatrix} \quad (22)$$

dir. Buradan S yüzeyinin Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{|g_2 g_1'|} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{|g_2|}{|g_1'|} \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial s} \left( \pm \frac{g_2'}{|g_1'|} (h_1 h_1' - h_2 h_2') \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left( \pm \frac{g_2'}{|g_1'|} (h_1 h_1' - h_2 h_2') \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{g_1'^2 + g_2'^2 (h_1^2 - h_2^2)}{|g_1' g_2|} \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{array} \right. \quad (23)$$

dört ifadenin toplamı olarak elde edilir. Bu ifadeleri ayrı ayrı tekrar düzenlersek birincisi

$$\pm \frac{g_2' g_1' - g_2 g_1''}{g_1'^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{|g_2|}{|g_1'|} \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

ikincisi

$$\pm \frac{g_2'' |g_1'| - g_2' (\pm g_1'')}{g_1'^2} (h_1 h_1' - h_2 h_2') \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{g_2'}{|g_1'|} (h_1 h_1' - h_2 h_2') \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$$

üçüncüsü

$$\pm \frac{g_2'}{|g_1'|} (1 + h_1 h_1'' - h_2 h_2'') \frac{\partial}{\partial s} \pm \frac{g_2'}{|g_1'|} (h_1 h_1' - h_2 h_2') \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$$

ve dördüncüsü

$$\pm \frac{g_2'^2 (2h_1 h_1' - 2h_2 h_2')}{|g_1' g_2|} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{g_1'^2 + g_2'^2 (h_1^2 - h_2^2)}{|g_1' g_2|} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

olarak karşımıza çıkar. Ayrıca

$$W = -g_2^2 g_1'^2 \quad (24)$$

olmak üzere normal vektör alanı

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{|W|}} (0, -g_1' g_2 h_2', -g_1' g_2 h_1') \quad (25)$$

dır. (24) eşitliği (25) te yerine konursa

$$\eta = \pm(0, -h'_2, -h'_1)$$

bulunur. Buradan S yüzeyinin Gauss dönüşümünün Laplace ı olan  $\Delta\eta$  aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\Delta\eta = \pm \frac{1}{g_2^2 g_1'^2} \left\{ \begin{array}{l} 2g_2'^2(h_1 h_1' - h_2 h_2')(0, h_2'', h_1'') \\ +g_1'^2 + g_2'^2(h_1^2 - h_2^2)(0, h_2''', h_1''') \end{array} \right. \quad (26)$$

**Teorem:** S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun.  $C_2$  eğrisi orijinden geçen bir düz doğru yani S yüzeyi minimal bir yüzey iken Gauss dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$2g_2'^2 h_2 h_2' h_2'' (c^2 - 1) + (1 + c^2 g_2'^2 h_2^2) h_2''' = 0 \quad (27)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat:** S, (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi ve  $C_2$  eğrisi orijinden geçen bir düz doğru olsun. Gauss dönüşümünün harmonik olduğunu kabul edelim. (26) eşitliğini düzenlediğimizde

$$2g_2'^2 (h_1 h_1' - h_2 h_2') h_2'' + (g_1'^2 + g_2'^2 (h_1^2 - h_2^2)) h_2''' = 0 \quad (28)$$

ve

$$2g_2'^2 (h_1 h_1' - h_2 h_2') h_1'' + (g_1'^2 + g_2'^2 (h_1^2 - h_2^2)) h_1''' = 0 \quad (29)$$

eşitlikleri elde edilir..  $C_2$  eğrisi orijinden geçen bir düz doğru olduğundan  $h_1(t) = h_2(t)c$  dir. Bu durum göz önüne alındığında (28) ve (29) eşitlikleri aynı sonucu verir. (28) eşitliğinde

$h_1(t) = h_2(t)c$  yazalım. O halde bu eşitlik



$$2g_2'^2(h_2h_2'(c^2 - 1))h_2'' + (g_1'^2 + g_2'^2(c^2 - 1)h_2^2)h_2''' = 0 \quad (30)$$

halini alır.  $C_1$  birim hızlı bir eğri olduğundan  $g_1'^2(s) - g_2'^2(s) = 1$  yani  $g_1'^2(s) = 1 + g_2'^2(s)$  dir. Bu eşitlik (30) da yerine yazılırsa (27) eşitliği elde edilir.

**Sonuç:**  $S$ , (9) eşitliğinde ki  $\Phi(s, t)$  parametrizasyonu ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun.  $C_2$  eğrisi orijinden geçen bir düz doğru yani  $S$  yüzeyi minimal bir yüzey iken Gauss dönüşümü daima harmoniktir.

**KAYNAKLAR**

- [1] Ali, A.T, Non-lightlike ruled surfaces with constant curvatures in Minkowski 3-space, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2018, Vol. 15(4), 1850068.
- [2] Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., Ozturk, G., On translation surfaces in 4-dimensional Euclidean space, Acta Et Commentationes Universtatis Tratuensis De Mathematica, 2016, Vol. 20, 123-133.
- [3] Bulca, B., Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Öztürk, G., Spherical product surfaces in  $\mathbf{IE}^4$ , An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 2012, Vol. 20(1), 41-54.
- [4] Bulca, B., Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Öztürk, G., Ugail, H., On spherical product surfaces in  $\mathbf{IE}^3$ , 2009 International Conference on CyperWorlds; Bradford, UK; 2009, 132-137.
- [5] Büyükkütük, S., Öztürk, G., An application of Factorable Surfaces in Euclidean 4-space  $\mathbf{IE}^4$ , TWMS J. App. Eng. Math., 2019, Vol. 9(1), 121-127.
- [6] Büyükkütük, S., Öztürk, G., Spacelike Translation Surfaces in Minkowski 4-Space  $\mathbf{IE}_1^4$ , Facta Universtatis Ser. Math. Inform., 2020, Vol. 35(3), 789-800.
- [7] Büyükkütük, S., Öztürk, G., Spherical product hypersurfaces in Euclidean spaces, Turkish Journal of Mathematics, 2024, Vol. 48(5), 903-913.
- [8] Chen, B.Y.; Choi, M.; Kim, Y.H., Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map. J. Korean Math. Soc. 2005, 42, 447–455.
- [9] Choi, M.; Kim, Y.H.; Liu, H.L.; Yoon, D.W. Helicoidal surfaces and their Gauss map in Minkowski 3-space. Bull. Korean Math. Soc. 2010, 47, 859–881.

- [10] Cvetkovic, M., Velimirovic, L. S., Helicoid and Curvature Based Functional Variations, *Filomat*, 2023, Vol. 37(25), 8553-8559.
- [11] Dugal, K.L., Bejancu, A., Lightlike submanifolds of Semi-Riemann manifolds and applications, *Kluwer Academic*, Dordrecht, 1996.
- [12] Gray, A., Surfaces of Revolution, Ch. 20 in *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 457-480, 1997.
- [13] Howel, L.L., Lang, R.J., Magleby, S.P., Zimmerman, T.K., Nelson, T.G., Developable mechanism on developable surfaces, *Science Robotics*, 2019, Vol. 4(27).
- [14] Jaclic, A., Leonardis, A., Salina, F., Superquadrics and their geometric properties: Segmentation and Recovery of Superquadrics, *Computational Imaging and Vision*, Dordrecht: Springer, 2000.
- [15] Kişi, İ., Öztürk, G., Spherical product surface having pointwise 1-type Gauss map in Galilean 3-space  $G_3$ , *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2019, Vol. 16(12), 1950186.
- [16] Kim, Y.H.; Yoon, D.W. Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *J. Geom. Phys.* 2000, Vol. 34, 191–205.
- [17] Körpınar, T., and Turhan, E., Tubular surfaces around timelike biharmonic curves in Lorentzian Heisenberg Group  $Heiss^3$ , *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 2012, Vol. 20(1), 431-446.
- [18] Kuiper, N.H., Minimal total absolute curvature for immersions, *Inventiones Mathematicae*, 1970, Vol. 10, 209-238.
- [19] McGrath, P., A Characterization of the Critical Catenoid, *Indiana University Mathematics Journal*, 2018, Vol. 67(2), 889-897.
- [20] Meng, H., Liu, H., Factorable surfaces in 3- Minkowski space, *Bull, Korean Math. Soc.*, 2009, Vol. 46(1), 155-169.

- [21] Wang, H., Goldman, R., Surfaces of revolution with moving axes and angles, Graphical Models, 2019, Vol. 106.
- [22] Velimirovic, L., Cvetkovic, M., Najdanovic, M. S., Velimirovic, N., Ruled Surfaces in Architecture, International Journal on Information Technologies & Security, 2009, No: 4.