# TEMEL MATEMATİK I

DR. YALÇIN ÖZTÜRK

SERÜVEN YAYINEVİ

**Genel Yayın Yönetmeni / Editor in Chief •** C. Cansın Selin Temana
**Kapak & İç Tasarım / Cover & Interior Design** • Serüven Yayınevi
**Birinci Basım / First Edition** • Mayıs 2024
**ISBN** • 978-625-6319-13-4


**Serüven Yayınevi / Serüven Publishing**
**Türkiye Adres / Turkey Address:** Kızılay Mah. Fevzi Çakmak 1. Sokak
Ümit Apt No: 22/A Çankaya/ANKARA
**Telefon / Phone:** 05437675765
**web**: www.seruvenyayinevi.com
**e-mail:** seruvenyayinevi@gmail.com
**Baskı & Cilt / Printing & Volume**
**Sertifika / Certificate No:** 47083

# TEMEL MATEMATİK I

DR. YALÇIN ÖZTÜRK

SERÜVEN
YAYINEVİ

## ÖNSÖZ

Matematik sadece bir dersi başarmak için öğrenilmesi gereken bir ders olmaktan ziyade insan zihninin çalışması ve gelişmesi için de öğrenilecek, bilimlerin temelidir. Bu bilimin insana analitik düşünme ile muhakeme gücü kattığı inkar edilemez bir gerçektir. Ayrıca ileri yaşlarda ortaya çıkabilecek sağlık problemlerinin de önüne geçebilmesi oldukça mümkündür.

Bu çalışma, matematiğin temel işlemlerini öğrenmek isteyenler için temel düzeyde hazırlanmıştır. Çalışmada en basitten başlayarak konular birbiri ardına verilmiştir. Konular birbirleriyle ilişkili olduğundan çalışmaya en baştan başlanmalı ve sıra ile ilerlenmelidir.

İlk beş bölümde sırası ile tam sayılar, rasyonel sayılar, üslü sayılar ve köklü sayılar incelenmiş ve temel işlemleri ile özellikleri örneklerle sunulmuştur. Bölüm 6'da en basit denklem türlerinden başlamak suretiyle mutlak değerli, üslü denklemler ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm yöntemleri incelenmiştir. Bölüm 7'de ise yüzde hesabı, sayı, hareket, yaş, karışım ve kar-zarar problemleri verilmiştir. Ayrıca bölümün sonunda basit faiz hesabı çalışılmıştır. Bölüm 8'de birçok bölümde ortaya çıkan çarpanlara ayırma ve özdeşlikler ilkeleri ile örneklendirilmiştir. Bölüm 9'da oran-orantı, Bölüm 10'da kümeler ve analitik geometrinin temeli olan kartezyen çarpım kümeler, Bölüm 11'de eşitsizlik kavramı ve uygulamaları, Bölüm 12'de ise ikinci dereceden denklemler ve bu denklemlerin çözümlerinin varlık şartları ile ikinci dereceden eşitsizliklerin çözüm kümelerinin belirlenmesi araştırılmıştır. Bölüm 13'de polinom kavramı ile polinomlardaki işlemler çalışılmıştır. Son olarak Bölüm 14'de ölçü birimleri incelenmiş as ve üs katları arasındaki geçişler verilmiştir.

# İçerik

# 1 TAM SAYILAR

## 1.1 Tam sayılar ile ilgili temel kavramlar

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sembollerinin herbirine bir **rakam** denir.

**Örnek 1.1.1** *Birbirinden farklı iki rakamın toplamı ve çarpımı en fazla ve en az kaçtır?*
*Çözüm:İki rakamın toplamının veya çarpımının en büyük olabilmesi için bu iki rakamın en büyük, en küçük olabilmesi için ise bu iki rakamın en küçük seçilmesi gerekir. Rakamlar birbirinden farklı olması istendiğinden rakamları* $9$ *ve* $8$ *alırsak toplam en büyük* $17$*, çarpım en büyük* $72$ *dir. Benzer şekilde toplamın ve çarpımın en küçük olması için rakamlar* $0$ *ve* $1$ *seçilmelidir. Buna göre toplam en az* $1$*, çarpım en az* $0$ *dır.*

Rakamlar bir araya gelerek miktar (çokluk, miktar) belirtmek üzere **doğal sayıları** oluştururlar:

$$0, 1, 2, 3, 4, ...$$

İki rakam bir araya gelirse iki basamaklı, üç rakam bir araya gelirse üç basamaklı vs. doğal sayılar elde edilir. Ayrıca doğal sayılardan sıfırın atılmasıyla elde edilen sayılara **sayma sayıları** denir. Doğal sayıların içeresine, sıfır hariç herbir doğal sayının eksilisinin katılmasıyla oluşturulan sayılara **tam sayılar** denir:

$$..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$$

**Örnek 1.1.2** $-5$ *bir tam sayıdır fakat bir doğal sayı değildir.*

**Örnek 1.1.3** *5 sayısı hem bir doğal sayıdır hemde bir tam sayıdır.*

Tam sayılar sıfırdan büyük olma veya küçük olma, çift yada tek olma gibi bazı sınıflara ayrılabilir:

1. $1, 2, 3, 4, 5, ...$ tam sayılarına **pozitif tamsayılar** denir.

2. $..., -3, -2, -1$ tam sayılarına **negatif tam sayılar** denir.

3. $0$ tam sayısı ne negatiftir nede pozitiftir.

Tam sayılar üzerinde iki tam sayıyı bir tam sayıya eşleyen bildiğimiz anlamda toplama, çıkarma ve çarpma olarak isimdirilmiş bazı kurallar tanımlanmıştır.

**Not 1.1.4** *Toplama işleminin bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:*

1. $a+0=0+a=a$ *(Birim eleman özellği)*
2. $a+b=b+a$ *(Değişme özelliği)*
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$ *(Birleşme özelliği)*
4. $a-b=a+(-b)$ *(Çıkarma işlemi)*
5. $a+(-a)=-a+a=0$ *(Toplamaya göre ters elemanm özelliği)*
6. $a+a=2a$, $a+a+a=3a$, $a+a+a+a=4a$,...
7. *$n$ bir doğla sayı ve $a$ bir tam sayı iken $n.a=$ çarpımı $n$-tane $a$'nın toplamıdır. Yani*

$$n.a=\underbrace{a+a+a+...+a}_{n-tane}$$

Burada (3) özelliği ikiden fazla sayıyı toplarken sıradan bağımsız şekilde istediğimiz sırada bu sayıları toplama fırsatı verir. Yani sırayı nasıl seçersek seçelim sonuç değişmeyecektir.

**Not 1.1.5** *Çarpma işleminin bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:*

1. $a.0=0.a=0$ *(Yutan eleman özelliği)*
2. $a.1=1.a=a$ *(Birim eleman özelliği)*
3. $ab=ba$ *(Değişme özelliği)*
4. $(a.b).c=a.(b.c)$ *(Birleşme özelliği)*
5. $a.a=a^2$, $a.a.a=a^3$, $a.a.a.a=a^4$, ... *(Kuvvet kavramı)*
6. $a(x\pm y)=ax\pm ay$, $(x\pm y)a=xa\pm xy$ *"çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği"*
7. $a.b=0$ *ise ya* $a=0$ *yada* $b=0$ *dır. (Sıfır bölen olmama özelliği)*

**Örnek 1.1.6** $2.5 = 5 + 5 = 10$

**Örnek 1.1.7** $3.(-4) = -4 + (-4) + (-4) = -12$

**Örnek 1.1.8** $3.(5 + 2) = 3.5 + 3.2 = 15 + 6 = 21$

**Örnek 1.1.9** $-4.(3 - 8) = (-4).3 - (-4).8 = -12 - (-32) = -12 + 32 = 20$

**Örnek 1.1.10** $-(-4) - (+2) + (-5) =?$

*Çözüm:* $-(-4) - (+2) + (-5) = 4 - 2 - 5 = 4 - 7 = -3$

$A$ ve $B$ birer tam sayı olmak üzere $A = 2.B$ ise $A$'ya bir **çift sayı** (2'nin katı olan sayılar) denir. Aksi halde yani 2'nin katı olmayan sayılara **tek sayı** denir.

**Örnek 1.1.11** *$12 = 2.6$ ve $-8 = 2.(-4)$ olduğundan $12$ ve $-8$ çift sayılardır. $11 = 2.B$ olacak şekilde bir $B$ tam sayısı olmadığından $11$ tektir.*

Bu tanımlar yardımıyla tam sayılar

1. $..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...$ tam sayıları çifttir
2. $..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...$ tam sayıları tektir.

şeklinde çift ve tek sayı diye sınıflandırabbilirler.

**Not 1.1.12** *$n$ bir tam sayı olmak üzere çift tam sayılar $2n$, tek tam sayılar $2n-1$ ile gösterilebilir.*

**Örnek 1.1.13** *$a$ ve $b$ birer tam sayı olmak üzere $a.b = 24$ ise $a + b$ en fazla ve en az kaç olabilir?*

*Çözüm: $a.b = 24$ olacak şekildeki $a$ ve $b$ tam sayılarını belirleyelim.*

| a | b |
|---|---|
| 1 | 24 |
| 2 | 12 |
| 3 | 8 |
| 4 | 6 |

*ve*

| a | b |
|---|---|
| -1 | -24 |
| -2 | -12 |
| -3 | -8 |
| -4 | -6 |

*Açıktır ki en büyük değer $a+b=25$, en küçük değer $a+b=-25$ dir.*

**Örnek 1.1.14** *a ve b birer doğal sayı olmak üzere $a.b=24$ ise $a+b$ en fazla ve en az kaç olabilir?*

*Çözüm: $a.b=24$ olacak şekildeki a ve b doğal sayılarını belirleyelim.*

| a | b |
|---|---|
| 1 | 24 |
| 2 | 12 |
| 3 | 8 |
| 4 | 6 |

*Açıktır ki en büyük değer $a+b=25$, en küçük değer $a+b=10$ dur.*

**Not 1.1.15** *T: tek tam sayıları ve Ç: çift tam sayıları göstermek üzere*

| | |
|---|---|
| $T \pm T = Ç$ | $T.T = T$ |
| $T \pm Ç = T$ | $T.Ç = Ç$ |
| $Ç \pm T = T$ | $Ç.T = Ç$ |
| $Ç \pm Ç = Ç$ | $Ç.Ç = Ç$ |

**Örnek 1.1.16** *a çift sayı ve b tek sayı olmak üzere a.b nin çift sayı olduğunu gösterelim.*

*Çözüm: a bir çift sayı ise k tam sayı olmak üzere $a=2k$ ve b bir tek sayı ise t bir tam sayı olmak üzere $b=2t-1$ yazılabilir. a.b'yi oluşturursak*

$$a.b = 2k.(2t-1) = 2k.2t - 2k = 2(2kt-k)$$

*$a.b=2(2kt-k)$ olduğundan a.b sayısı $2kt-k$ tam sayısının 2-katı olduğundan bir çift sayıdır.*

**Örnek 1.1.17** *m çift ise*

1. $4m+2$

2. $3m-1$

3. $m^2-6m+6$

*ifadeleri tek yada çift olup olmadığını belirleyiniz.*

*Çözüm:*

1. *$m$ çift ise $4m$ çifttir. $Ç + Ç = Ç$ olduğundan $4m + 2$ çifttir.*
2. *$m$ çift olduğundan $3m$ çifttir. $Ç - T = T$ olduğundan $3m - 1$ tektir.*

### 1.1.1 Pozitif ve negatif sayı

**Büyük ve küçük işaretleri:**

$a > b$ ifadesi "$a$ sayısı $b$ sayısından büyüktür" demektir.

$a < b$ ifadesi "$a$ sayısı $b$ sayısından küçüktür" demektir.

$a < x < b$: $x$ sayısı, $a$'dan büyük ($a$ dahil değil) $b$'den küçük ($b$ dahil değil) sayılardır. $a$ dan büyük $b$ den küçük sayıların içerisinde tam sayıların yanında rasyonel sayılar ve rasyonel olmayan (irrasyonel sayılar) sayılarda vardır. Bu sayıların tanımları gelecek bölümlerde verilecektir.

$a \leq x \leq b$: $x$ sayısı, $a$'dan büyük ($a$ dahil) $b$'den küçük ($b$ dahil) sayılardır.

**Örnek 1.1.18**

*$-2 < x < 5$ ise $x$'in tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.*

*Çözüm: $-2 < x < 5$ olacak şekildeki tam sayılar $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ tür. Bu sayıların toplamı $9$ dur.*

**Örnek 1.1.19**

*$-2 \leq x < 5$ ise $x$'in tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.*

*Çözüm: $-2 \leq x < 5$ olacak şekildeki tam sayılar $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ tür. Bu sayıların toplamı $7$ dir.*

**Örnek 1.1.20**

*$x$ ve $y$ tam sayılar ve $-4 \leq x \leq 3$, $-4 \leq y \leq 5$ ise $xy$ en fazla kaçtır?*

*Çözüm:* $-4 \leq x \leq 3$ *ise* $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ *ve* $-4 \leq y \leq 5$ *ise* $y = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *olabilir. Buna göre* $xy$ *çarpımı en fazla* $16$ *dır.*

**Örnek 1.1.21**

*$x$ ve $y$ birer tam sayı olsun. $-4 < x < 3$ ve $-1 < y < 4$ ise $2y - x$ in en büyük değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $2y - x$ *nin en büyük olabilmesi için* $y$ *i en büyük pozitif tam sayı ve* $x$ *i en küçük negatif tam sayı seçmeliyiz. Çünkü* $x$ *negatifken* $-x$ *pozitiftir. Buna göre* $y = 3$ *ve* $x = -3$ *seçilirse* $2y - x = 2.3 - (-3) = 6 + 3 = 9$ *olarak elde edilir.*

Sıfırdan büyük sayılara **pozitif sayılar** denir. $a$ pozitif bir sayı ise $a > 0$ ile gösterilir. Sıfırdan küçük sayılara **negatif sayılar** denir. $b$ negatif bir sayı ise $b < 0$ ile gösterilir.

**Örnek 1.1.22** *$a$ ve $b$ birer pozitif tam sayı olmak üzere $2a + 3b = 51$ ise $b$ en fazla kaç olabilir?*
*Çözüm:* $b$ *nin en büyük olabilmesi için* $a$ *en küçük seçilmelidir. Buna göre*

$a = 1$ *için* $2.1 + 3b = 51$ *ise* $3b = 49$ *dur.* $b$ *pozitif bir tam sayı değildir.*

$a = 2$ *için* $2.2 + 3b = 51$ *ise* $3b = 47$ *dir.* $b$ *pozitif bir tam sayı değildir.*

$a = 3$ *için* $2.3 + 3b = 51$ *ise* $3b = 45$ *ve* $b = 15$ *olarak bulunur.*

**Örnek 1.1.23** *$a$, $b$ ve $c$ birer doğal sayı olmak üzere*

$$a.b = 24$$

$$b.c = 18$$

*ise $a + b + c$ en az kaç olabilir?*
*Çözüm:* $ab = 24$ *ve* $bc = 18$ *olduğundan* $b$ *sayısı* $24$ *ve* $18$ *in ortak çarpanı olmalıdır. Olabilecek durumlar*

$b = 1$ *için* $a = 24$, $c = 18$ *dir.*

*$b = 2$ için $a = 12$, $c = 9$ dir.*

*$b = 3$ için $a = 8$, $c = 6$ dir.*

*$b = 6$ için $a = 4$, $c = 3$ dir.*

*olduğundan $a + b + c$ nin en küçük değeri 13 dür.*

**Not 1.1.24** *$-$: negatif sayıları ve $+$: pozitif sayıları göstermek üzere*

| | |
|---|---|
| $-.- = +$ | $\frac{-}{-} = +$ |
| $-.+ = -$ | $\frac{-}{+} = -$ |
| $+.- = -$ | $\frac{+}{-} = -$ |
| $+.+ = +$ | $\frac{+}{+} = +$ |

**Örnek 1.1.25**

1. $(-2)(-5) = 10$
2. $(2)(-5) = -10$
3. $8(-5) = -40$
4. $-(-8) = 8$
5. $\dfrac{4}{-2} = -2$

**Örnek 1.1.26** *$x < 0 < y$ olduğuna göre $x^3y^6$ nın işaretini belirleyiniz.*
*Çözüm: $x < 0$ ise $x^3 < 0$ dır. Kuvvet çift olduğundan $y$ ne olursa olsun $y^6 > 0$ dir. Bu halde $x^3y^6 < 0$ dır.*

**Örnek 1.1.27** *$(a + 3).5 = 0$ ise $a$ kaçtır?*
*Çözüm: $(a + 3).5 = 0$ ise $a + 3 = 0$ olmalıdır. Bu halde $a = -3$ dür.*

**Not 1.1.28** *Çarpma işareti olan "." bazen yazılmaz. Yani $x.y = xy$ yazılabilir. Burada $xy$ ifadesi $x$ ile $y$ nin çarpımı olduğu gibi bazen $x$ ve $y$ birer rakam olmak üzere iki basamaklı bir sayıyıda gösterebilir. Bu iki durumu karıştırmamak gerekmektedir.*

Bölme tam sayılar üzerinde bir işlem değildir. Yani iki tam sayıyı bir birine böldüğümüzde her zaman yine bir tam sayı bulamayabiliriz. Olduğu birçok örnek olmakla beraber, örneğin, 2 yi 3'e bölersek 2 : 3 ( $\frac{2}{3}$ ) bir tam sayı değildir. Bir tam sayı başka bir tam sayıyı böler ifadesinden ne anlayacağız:

$A$ ve $B$ iki doğal sayı (tam sayı) olsun. $A = B.C$ olacak şekilde bir $C$ sayısı var ise $B$, $A$'yı **böler** denir. $A = B.C$ ise $A : B = C$ ($\frac{A}{B} = C$) yazılır.

**Örnek 1.1.29** $12 = 4.3$ *ve* $12 = 3.4$ *olduğundan* 3 *ve* 4, 12 *yi böler.*

**Örnek 1.1.30** 12*'nin doğal sayı bölenleri* $1, 2, 3, 4, 6, 12$ *dir.*

**Örnek 1.1.31** 12*'nin tam sayı bölenleri* $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12$ *dir.*

### 1.1.2 İşlem önceliği

Toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve parantezlerin olduğu bir işlemde işlem önceliği şöyledir: varsa ilk olarak parantez içleri yapılır, sonra varsa bölme, sonra varsa çarpma ve en son toplama yada çıkarma yapılır. İç içe geçmiş parantezler varsa en içteki parantezden dışa doğru işlemler yapılır.

**Örnek 1.1.32** $2 - 4(3 - 4) =?$

*Çözüm:* $2 - 4(3 - 4) = 2 - 4(-1) = 2 + 4 = 6$

**Örnek 1.1.33** $4 + 3.(-2) =?$

*Çözüm:* $4 + 3.(-2) = 4 - 6 = -2$

**Örnek 1.1.34** $(4 + 3)(-2) =?$

*Çözüm:* $(4 + 3)(-2) = 7(-2) = -14$

**Örnek 1.1.35** $8 : (4 - 2) + 5 - (-3) =?$

*Çözüm:* $8 : (4 - 2) + 5 - (-3) = 8 : (2) + 5 + 3 = 4 + 5 + 3 = 12$

**Örnek 1.1.36** $6 - 2\Big( - (6 - (-3)) : (-4 - (-1))\Big) =?$

*Çözüm:* $6 - 2\Big( - (6 - (-3)) : (-4 - (-1))\Big) = 6 - 2\Big( - (6 + 3) : (-4 + 1)\Big) = 6 - 2\Big( - 9 : (-3)\Big) = 6 - 2(3) = 6 - 6 = 0$

**Problemler**

1. $2.3-(-3).4-4.(-2).(-5)=?$

2. $6-3.(-2-4)+3.(4-1)=?$

3. $a,b,c$ sıfırdan ve birbirinden farklı birer rakam olsun. $a-2b+3c$ nin en büyük değerini bulunuz.

4. $a,b,c$ birer rakam olsun. $a-b+c$ nin en küçük değeri için $ac$ nin en büyük değerini bulunuz.

5. $a$, $b$ ve $c$ birer tam sayı olmak üzere

$$ab=-24$$

$$bc=18$$

   ise $a+b+c$ en fazla ve en az kaç olabilir?

6. $2a=3b+1$ eşitliğinde $a$ ve $b$ nin teklik ve çiftlik durumlarını inceleyiniz.

7. $a<b<c$ ise $(b-a)(a-c)(c-b)$ nin işaretini belirleyiniz.

8. $4-(-4):2+(-4)(2)=?$

9. $-8:4-4.(-2)=?$

10. $(12:(-3)):(-2)=?$

11. $3(2-(-1))+(-12+2):(-5)=?$

12. $8-\dfrac{4(-5-(+1))}{6}=?$

13. $(-4)(-7-(-1)):6-(-2)=?$

14. $(-3).(2x-3y)-(4-(+2)).(y-3x)=?$

15. $(a-1).(-1-1)-(-2).(1-3a)=?$

## 1.2 Bir tam sayının doğal sayı kuvveti (üssü)

**Tanım 1.2.1** *a bir tam sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere*

$$a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n-tane}$$

*ile tanımlanır.*

**Örnek 1.2.2**

1. $2^1 = 2$
2. $2^2 = 2.2 = 4$
3. $2^3 = 2.2.2 = 8$
4. $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
5. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
6. $1^5 = 1.1.1.1.1 = 1$
7. $(-1)^5 = -1$

**Özellik 1.2.3** *a, b birer tam sayı ve m, n birer doğal sayı olsun.*

1. $a^0 = 1,\ a \neq 0$
2. $0^0$ *bir sayı değildir.*
3. $a^1 = a$
4. $a^m.a^n = a^{m+n}$

   İspat: $a^m.a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{m-tane}.\underbrace{a.a.a...a}_{n-tane} = \underbrace{a.a.a...a}_{m+n-tane} = a^{m+n}$
5. $(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m$
6. $a^nb^n = (ab)^n$

**Not 1.2.4** $(-2^2)^3 \neq (-2^3)^2$ *olduğunu gözlemleyiniz.*

**Örnek 1.2.5**

1. $(-8)^0 = 1,\ 5^0 = 1$
2. $4^1 = 4,\ 0^1 = 0,\ (-2)^1 = -2$

*3.* $2^5.2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

*4.* $2^4.3^4 = (2.3)^4 = 6^4$

**Örnek 1.2.6** $(-1)^5 - 1^5 - (-4)^1 + 5^0 = ?$

*Çözüm:* $(-1)^5 = -1$, $1^5 = 1$, $(-4)^1 = -4$ *ve* $5^0 = 1$ *olduğundan*

$$(-1)^5 - 1^5 - (-4)^1 + 5^0 = -1 - 1 - (-4) + 1 = -2 + 4 + 1 = 3$$

*elde edilir.*

**Örnek 1.2.7** $2^n = x$ *ise* $8^n$ *ifadesinin* $x$ *türünden eşitini bulunuz.*

*Çözüm:* $8^n = (2^3)^n = (2^n)^3 = x^3$ *tür.*

**Özellik 1.2.8** *$n$ bir doğal sayı olsun.*

*1.* $1^n = 1$.

*2.* *$n$ çift ise* $(-1)^n = 1$.

*3.* *$n$ tek ise* $(-1)^n = -1$.

*4.* $a > 0$ *ise* $a^n > 0$.

*5.* $a < 0$ *olsun.*

  **i)** *$n$ tek ise* $a^n < 0$.

  **ii)** *$n$ çift ise* $a^n > 0$.

**Örnek 1.2.9** $(-2)^5 = (-1.2)^5 = (-1)^5 2^5 = -2^5$ *yazılabilir.*

**Not 1.2.10** $-2^4$ *ile* $(-2)^4$ *sayıları birbirinden farklı sayılardır. Çünkü*

$$-2^4 = -2.2.2.2 = -16$$

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$

*dır.*

**Örnek 1.2.11** *$a$ ve $b$ sayılar olmak üzere $a^4b^7 > 0$ ve $a^5b^9 < 0$ ise $a$ ve $b$ nin işaretlerini belirleyiniz.*

*Çözüm: $a^4b^7 > 0$ ifadesinde $a$ nın işareti ne olursa olsun $a^4 > 0$ dür. Buradan $b^7 > 0$ olmalıdır. $b^7 > 0$ ise $b > 0$ dır.*

*$a^5b^9 < 0$ ifadesi için $b > 0$ olduğundan $b^9 > 0$ dur. Buradan $a^5 < 0$ olmalıdır. $a^5 < 0$ ise $a < 0$ dır.*

**Problemler**

1. $(-3)^2 =?$, $-3^2 =?$, $(-3)^3 =?$, $-3^3 =?$
2. $(-2)^3 - (-2)^2 - (-2)^1 =?$
3. $(-5)^2 - 5^2 =?$
4. $(-2)^0 - (-2)^1 + (-2)^2 =?$
5. $(-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^3 =?$
6. $3^x = a$ ise $27^x$ i $a$ türünden hesaplayınız.
7. $2^x = a$ ve $3^x = b$ ise $24^x$ i $a$ ve $b$ türünden hesaplayınız.
8. $x > 0$, $y < 0$ ise $x^5y^5$ in işaretini belirleyiniz.
9. $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$ ise $x^5y^7z^3$ in işaretini belirleyiniz.
10. $a^6b^7 < 0$ ve $a^5b^8 > 0$ ise $a$ ve $b$ nin işaretlerini belirleyiniz.
11. $a$ ve $n$ birer tam sayı olmak üzere $(n^2 + 1)(a^2 - 9) = 0$ ise $a$ nın alabileceği kaç tane değer vardır?

## 1.3 Ardışık sayılar

Ard arda gelen sayılar arasındaki fark aynı olan sıralanmış sayılara **ardışık sayılar** denir.

**Örnek 1.3.1** *$n$ bir doğal sayı olsun.*

1. $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ *doğal sayılar ardışık sayılara bir örnektir. Buradaki kural; bir sonraki sayı ile bir önce sayı arasındaki farkın 1 olmasıdır.*

2. $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ *tam sayılar ardışık sayılardır.*

3. $..., -2n, ..., -4, -2, 0, 2, 4, ..., 2n, ...$ *çift tam sayılar ardışık sayılardır.*

4. $..., -2n-1, ..., -3, -1, 1, 3, ..., 2n+1, ...$ *tek tam sayılar ardışık sayılardır.*

5. $5$ *in katı olan tam sayılar* $..., -5n, ..., -10, -5, 0, 5, 10, ..., 5n, ...$ *ardışık sayılardır.*

6. $1, 4, 9, 25, ...$ *ardışık sayılar değildirler.*

**Örnek 1.3.2** *$a$, $b$ ve $c$ ardışık çift tam sayılar ve $c > b > a$ olduğuna göre*

$$\frac{(c-b)(a-c)}{a-b}$$

*ifadesinin değerini bulunuz.*

*Çözüm:*

**I. Yol:** *Değer vererek bu soru çözülebilir. $a = 2$, $b = 4$ ve $c = 6$ alınabilir. Böylece $c - b = 2$, $a - c = -4$ ve $a - b = -2$ olduğundan*

$$\frac{(c-b)(a-c)}{a-b} = \frac{2.(-4)}{-2} = 4$$

*elde edilir.*

**II. Yol:** *$a$, $b$ ve $c$ ardışık çift sayılarını en genel olarak $a = 2n$, $b = 2n+2$ ve $c = 2n+4$ alabiliriz. Buradan $c - b = 2$, $a - c = -4$ ve $a - b = -2$ elde edilir. Böylece*

$$\frac{(c-b)(a-c)}{a-b} = \frac{2.(-4)}{-2} = 4$$

*elde edilir.*

**Örnek 1.3.3** *Ardışık üç çift tam sayının toplamı 66 ise bu sayıların en küçüğünü bulunuz.*

*Çözüm: Ardışık çift tam sayıları küçükten büyüğe doğru* $2n$, $2n+2$, $2n+4$ *alalım. Bu üç sayının toplamı* 66 *olduğuna göre*

$2n+2n+2+2n+4=66$ *eşitliği vardır.*

$6n+6=66$, $6n=60$, $n=10$ *elde edilir.*

*Bu sayıların en küçüğü* $2n$ *olduğundan en küçük sayı* $2.10=20$ *dir.*

**Örnek 1.3.4** *5 in katı olan ardışık 4 tam sayının toplamı 410 ise bu sayıların en büyüğünü bulunuz.*

*Çözüm: Ardışık* 5 *in katı olan sayılar* 5 *er* 5 *er büyür yada küçülür. Ardışık* 5 *in katı olan tam sayılar* $5n$, $5n+5$, $5n+10$, $5n+15$ *olarak alınabilir. Bu dört sayının toplamı* 410 *olduğuna göre*

$5n+5n+5+5n+10+5n+15=410$ *eşitliği vardır.*

$20n+30=410$, $20n=380$, $n=19$ *elde edilir.*

*Bu sayıların en büyüğü* $5n+15$ *olduğundan en büyük sayı* $5n+15=5.19+15=110$ *dur.*

## 1.4 Bazı ardışık sonlu toplamlar

$n$ bir doğal sayı olsun. Bazı sonlu terimlerin toplamlarını hesaplıyalım:

1. $1+2+3+...+(n-1)+n$ toplamını bulalım. $1+2+3+...+(n-1)+n=A$ olsun. Bu halde $n+(n-1)+(n-2)+...+2+1=A$ dır. İki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{n\ tane}=2A$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 2A &= n(n+1) \\ A &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

dir.

**Örnek 1.4.1** $1+2+3+..+20$ *toplamını bulunuz?*

*Çözüm:* $n=20$ *olduğundan*

$$1+2+3+..+20=\frac{20.21}{2}=210$$

*dur.*

**Örnek 1.4.2** $30+31+32+...+80$ *toplamını bulunuz?*

*Çözüm:*

$$1+2+...+29+30+....+80=\frac{80.81}{2}$$

*olduğundan*

$$30+....+80=\frac{80.81}{2}-(1+2+...+29)=\frac{80.81}{2}-\frac{29.30}{2}=3240-435=2805$$

*dir.*

2. $2+4+6+...+2n$ toplamını bulalım.

$$2+4+6+...+2n=2(1+2+3+...+n)=2\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

dir. Böylece

$$2+4+6+...+2n=n(n+1)$$

dir.

3. $1+3+5+...+(2n+1)$ toplamını bulalım.

$$\underbrace{1+3+5+...+(2n+1)}_{(n+1)terim}=1+(2+1)+(4+1)+...+(2n+1)$$

$$=(\underbrace{1+1+1+...+1}_{n+1\ tane})+(2+4+6+...+2n)=(n+1)+n(n+1)=(n+1)^2$$

dir. Böylece $1+3+5+...+2n+1=(n+1)^2$ dir.

**Örnek 1.4.3** $r+(r+x)+(r+2x)+(r+3x)+...+(r+nx)$ *toplamını bulunuz?*

*Çözüm:* $r+(r+x)+(r+2x)+(r+3x)+...+(r+nx)=\underbrace{(r+r+r+...+r)}_{n+1\ tane}+(x+2x+3x+...+nx)=(n+1)r+x(\frac{n(n+1)}{2})=(n+1)[r+\frac{x.n}{2}]$ *dir.*

**Örnek 1.4.4** $5 + 10 + 15 + ... + 55$ *toplamını bulunuz?*

*Çözüm:*

$5 + 10 + 15 + ... + 55 = 5 + (5 + 5) + (5 + 10) + (5 + 15) + ... + (5 + 50) = 5+(5+1.5)+(5+2.5)+(5+3.5)+...+(5+5.10)$ *olduğundan* $r = 5$, $x = 5$ *ve* $n = 11$ *dir. Yukarıdaki örnekten,* $5+10+15+...+55 = 12.5+5.11.12/2 = 60+330 = 390$ *elde edilir.*

## 1.5 Sayı sistemleri ve sayıların çözümlenmesi

Rakamlar bir araya gelerek oluşturdukları sayı içerisindeki her bir rakama **basamak**, rakamların bulundukları yerdeki değerine **basamak değeri** denir. Bir doğal sayının tanımlandığı sayı sistemine **sayı tabanı** denir. Taban 1 den büyük bir doğal sayıdır. Bilgisayar yazılımları, elektrik devreleri gibi uygulamalarda genel olarak 2'lik, 3'lük,..., 9'luk ve 10'luk tabanlar karşımıza çıkar. 10 luk taban günlük hayatta kullandığımız tabandır.

Bir tabanın rakamları tabandan küçük olan doğal sayılardır. Örneğin,

- 2 lik tabanın rakamları: 0 ve 1 dir. Bu halde 2 lik tabanda bir sayı yazılmak istenirse bu sayı 0 ve 1 den oluşmak zorundadır.
- 3 lük tabanın rakamları: 0,1,2
- 4 lük tabanın rakamları: 0,1,2,3
- 5 lik tabanın rakamları: 0,1,2,3,4
- 10'luk tabanın rakamları: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$n$ bir taban ve $a, b, c$ ve $d$ bu tabanın rakamaları olmak üzere $(abcd)_n$ "$n$ tabanında $abcd$ sayısı diye okunur." ile yazılan sayının basamakları:

d nin bulunduğu basamak $n^0$' lar basamağı;

c nin bulunduğu basamak $n^1$' ler basamağı;

b nin bulunduğu basamak $n^2$' ler basamağı;

a nin bulunduğu basamak $n^3$' ler basamağı;

olarak isimlendirilir. Bu sayının

$$(abcd)_n = d.n^0 + c.n^1 + b.n^2 + a.n^3$$

şeklindeki yazılımına $(abcd)_n$ sayısının $n$ tabanına göre **çözümlenmesi** denir. Taban belirtilmez ise 10'luk tabandır. Ayrıca taban 10 olduğunda taban yazılmaz. Yani

$$(abcd)_{10} = abcd$$

dir.

10'luk tabanda bir $abcd$ sayısını çözümlersek;

$$abcd = d.10^0 + c.10^1 + b.10^2 + a.10^3$$

elde edilir

**Örnek 1.5.1** **1.** 142 *sayısının birler basamağında 2, onlar basamağında 4 ve yüzler basamağında 1 vardır.* 142 *sayısını*

$$142 = 2.10^0 + 4.10^1 + 1.10^2 = 2.1 + 4.10 + 1.100$$

*şeklinde çözümlenir.*

**2.** $1453 = 3.10^0 + 5.10^1 + 4.10^2 + 1.10^3 = 3.1 + 5.10 + 4.100 + 1.1000$ *şeklinde çözümlenir.*

**3.** *İki basamaklı en küçük doğal sayı* 10*, en büyük doğal sayı* 99*' dur.*

**4.** *Üç basamaklı en küçük doğal sayı* 100*, en büyük doğal sayı* 999*' dur. Üç basamaklı rakamları farklı en küçük doğal sayı* 102*, en büyük doğal sayı* 987*' dir.*

**Örnek 1.5.2** *Birbirinden farklı üç basamaklı üç doğal sayının toplamı 875 ise bu sayıların en büyüğü en çok kaçtır?*

*Çözüm: En büyük sayıyı bulabilmek için diğer sayıları en küçük seçmeliyiz. Sayılar birbirinden farklı olması gerektiğinden en küçük seçilebilecek sayılar* 100 *ve* 101 *dir. En büyük sayı $x$ olsun. Bu halde*

$100 + 101 + x = 875$, $201 + x = 875$, $x = 674$ *olarak elde edilir.*

**Örnek 1.5.3** *$ab$ iki basamaklı bir sayı ve $a = 2b+1$' dir. Bu şekilde yazılabilecek bütün $ab$ sayılarının toplamını bulunuz.*

*Çözüm: $ab$ iki basamaklı sayı olduğundan $a$ ve $b$ birer rakamdır. Buna göre $a = 2b+1$ eşitliğini sağlayan rakamlarını bulmalıyız. Buna göre olabilecek durumlar*

$b = 0$ *alınırsa* $a = 1$

$b = 1$ *alınırsa* $a = 3$

$b = 2$ *alınırsa* $a = 5$

$b = 3$ *alınırsa* $a = 7$

$b = 4$ *alınırsa* $a = 9$

*gibidir. Böylece bu $ab$ sayıları* 10, 31, 52, 73, 94 *dür.*

**Not 1.5.4** *$ab$ ve $aa$ iki basamaklı sayılar, $abc$ ve $aaa$ üç basamaklı sayılar olmak üzere*

**1.** $ab = 10a + b$

**2.** $aa = 10a + a = 11a$

**3.** $abc = 100a + 10b + c$

**4.** $aaa = 100a + 10a + a = 111a$

*ile çözümlenir.*

**Örnek 1.5.5** *$ab$ iki basamaklı bir sayı olsun. $ab + ba = 55$ ise $a + b$ kaçtır?*

*Çözüm: $ab = 10a + b$ ve $ba = 10b + a$ olduğundan*

$ab + ba = 55$, $10a + b + 10b + a = 55$, $11a + 11b = 55$, $a + b = 5$ *elde edilir.*

**Örnek 1.5.6** *Dört basamaklı $A3B1$ ve $A1B9$ sayıları için $A3B1 - A1B9$ farkını bulunuz.*

*Çözüm: Sayılar çözümlenirse*

$A3B1 - A1B9 = 1000A + 300 + 10B + 1 - (1000A + 100 + 10B + 9) = 301 - 109 = 192$ *elde edilir.*

**Örnek 1.5.7** *İki basamaklı bir sayının rakamları yerleri değiştirildiğinde sayı 36 azaldığına göre bu sayının rakamları farkını bulunuz.*

*Çözüm: Bu iki basamaklı sayı ab olsun. Bu sayının rakamları yerleri değiştirildiğinde ba sayısı elde edilir. Buna göre*

$ab - ba = 36,\ 10a + b - 10b - a = 36,\ 9(a - b) = 36,\ a - b = 4$

## 1.6 Taban aritmetiği

Sayıları tabandan tabana çevirebiliriz. $(abcd)_n$ sayısı $n-$tabanına göre çözümlenirse

$$(abcd)_n = d.n^0 + c.n^1 + b.n^2 + a.n^3$$

sayı 10 luk tabana çevrilmiş olur.

**Örnek 1.6.1** $(101)_2$ *sayısını* 10 *luk tabana çeviriniz.*

*Çözüm:* 2 *lik tabandaki* 101 *sayısını çözümlersek*

$(101)_2 = 1.2^0 + 0.2^2 + 1.2^2 = 1 + 0 + 4 = 5$ *elde edilir.* $(101)_2$ *sayısı* 10 *luk tabanda* 5 *e eşittir.*

**Örnek 1.6.2** $(2012)_3$ *sayısını* 10 *luk tabana çeviriniz.*

*Çözüm:* $(2012)_3 = 2.3^0 + 1.3^1 + 0.3^2 + 2.3^3 = 2 + 3 + 0 + 54 = 59$ *dur.*

**Örnek 1.6.3** $(342)_5$ *sayısını* 10 *luk tabana çeviriniz.*

*Çözüm:* $(342)_5 = 2.5^0 + 4.5^1 + 3.5^2 = 2 + 20 + 75 = 97$ *dir.*

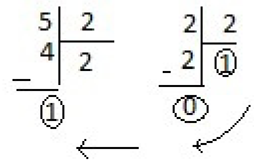
### 1.6.1 10 luk tabandan başka bir tabana çevirme

5 sayısını 2 lik tabana çevirelim. Yukarıda $(101)_2$ sayısının 5 e eşit olduğunu görmüştük. Buna göre

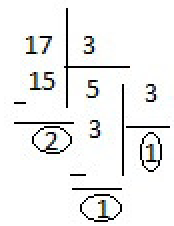
$5 = 1.2^0 + 0.2^2 + 1.2^2$ olduğundan

$5 = (101)_2$ olduğu açıktır.

Daha büyük sayılarda ve tabanlarda bu eşitlikleri görebilmek oldukça zordur. Bunu için daha basit bir yol verilebilir. 10 luk tabandaki bir sayı başka bir tabana çevrilirken, verilen sayı arka arkaya istenilen tabana bölünür. Bu işlem bölüm tabandan küçük olana kadar yapılır. En son bölümden başlayarak kalanlar sağdan sola doğru yazılır. Böylece verilen sayı istenilen tabana çevrilmiş olur.




Şekil 1: Örnek1.6.4




Şekil 2: Örnek1.6.5

**Örnek 1.6.4** 5 *sayısını* 2 *lik tabana çevirelim.*

*Çözüm:* 5, 2 *ye bölünür ve* 2 *bölümü elde edilir.* 2 *bölümü* 2 *ye bölünür ve* 1 *bölümü elde edilir. Bölen* 1, 2 *den küçük olduğu için işlem biter. En son bölümden başlayarak kalanlar sağdan sola doğru ilk kalana kadar sıra ile yazılır. Böylece* $5 = (101)_2$ *elde edilir. Şekil 1 de gösterilmiştir.*

**Örnek 1.6.5** 17 *sayısını* 3 *lik tabana çeviriniz.*

*Çözüm:* 17, 3 *e bölünür ve* 5 *bölümü elde edilir.* 5 *bölümü* 3 *e tekrar bölünür ve* 1 *bölümü elde edilir. Bölen* 1, 3 *den küçük olduğu için işlem biter. En son bölümden başlayarak kalanlar sağdan sola doğru ilk kalana kadar sıra ile yazılır. Böylece* $17 = (112)_3$ *elde edilir. Şekil 2 de gösterilmiştir.*

### 1.6.2 Tabandan tabana çevirme

Herhangi bir tabanda verilen sayı önce 10 luk tabana ve buradan istenilen tabana çevrilir.

**Örnek 1.6.6** $(102)_3$ *sayısını* 2 *lük tabana çeviriniz.*

*Çözüm: Öncelikle* $(102)_3$ *sayısını* 10 *luk tabana çevirelim:*

$(102)_3 = 2.3^0 + 0.3^1 + 1.3^2 = 2 + 0 + 9 = 11$ *elde edilir.*

*Elde dilen* 10 *luk tabandaki sayıyı* 4 *lük tabana çevirelirse* $11 = (23)_4$ *elde edilir.*

## Problemler

1. Birbirinden farklı iki basamaklı 5 doğal sayının toplamı 463 ise bu sayıların en küçüğü en az kaçtır?

2. Üç basamaklı bir $A$ sayının yüzler basamağı 5 arttırıyor, onlar basamağı 8 azaltılıyor $B$ sayısı elde ediliyor. $B - A$ farkını bulunuz.

3. $abc$ üç basamaklı bir sayı ve $a = 2c$, $a = b + 3$' dir. Bu şekilde yazılabilecek $abc$ sayılarını bulunuz.

4. $abc$ ve $cba$ üç basamaklı sayılar, $ab$ ve $ba$ iki basamaklı sayılar olmak üzere $\frac{abc-cba}{ba-ab}$ =?

5. $a = 2b = 4c$ olacak şekildeki $abc$ üç basamaklı sayılarını belirleyiniz.

6. $a$ ve $b$ birer rakam olmak üzere $ab = a^3$ koşulunu sağlayan $ab$ sayılarını bulunuz.

7. $xy$ ve $yx$ iki basamaklı birer sayı olsun. $xy + yx = 10(x - y)$ koşuluna uygun bütün $xy$ sayılarını bulunuz.

8. $(1021)_3$ sayısını 10 luk tabana çeviriniz.

9. $(10101)_2$ sayısını 10 luk tabana çeviriniz.

10. $(14)_5$ sayısını 10 luk tabana çeviriniz.

11. 22 sayısının 2 lik tabandaki karşılığını bulunuz.

12. 43 sayısının 3 lük tabandaki karşılığını bulunuz.

13. 145 sayısının 6 lik tabandaki karşılığını bulunuz.

14. $(231)_4$ sayısını 3 lük tabanda yazınız.

15. $(121)_3 = (?)_2$

## 1.7 Kalanlı Bölme

$A, B, C, K$ doğal sayılar, $B \neq 0$ ve $K < B$ olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} \text{A} & \text{B} \\ \cline{2-2} \vdots & \text{C} \\ \cline{1-1} K & \end{array}$$

yada $A = B.C + K$ işlemine kalanlı bölme denir. Bu işlemde

$A$' ya bölünen

$B$' ye bölen

$C$' ye bölüm

$K$'ya kalan

denir.

**Örnek 1.7.1** *Verilen bölme işleminde*

$$\begin{array}{r|l} \mathit{38} & \mathit{5} \\ \cline{2-2} \vdots & \mathit{7} \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

*bölünen sayı 38, bölen sayı 5, bölüm 7 ve kalan 3 'tür. Açıktır ki* $38 = 5.7 + 3$*.*

**Örnek 1.7.2** *Aşağıda verilen bölme işlemlerine göre A sayısının* 24 *ile bölümünden kalanı bulunuz.*

$$\begin{array}{r|l} A & \mathit{6} \\ \cline{2-2} \vdots & B \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} B & 4 \\ \cline{2-2} \vdots & C \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{c}{2} & \end{array}$$

*Çözüm: Verilen bölme işlemlerinden*

*Birincisinden* $A = 6B + 5$

*İkincisininde* $B = 4C + 2$

*yazılabilir. İkinci eşitlikdeki* $B$*, birinci eşitlikde yerine yazılırsa*

$A = 6(4C + 2) + 5 = 24C + 17$ *elde edilir.*

*Böylece* $A$*,* $24$ *e bölündüğünde bölüm* $C$*, kalan ise* $17$ *dir.*

**Örnek 1.7.3** *Verilen bölme işlemine göre* $A$ *en fazla kaç olabilir?*

$$\begin{array}{r|l} A & 20 \\ \cline{2-2} \vdots & n \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{c}{n^2} & \end{array}$$

*Çözüm: Açıktır ki,* $A = 20n + n^2$ *ve* $n^2 < 20$ *olmalıdır.* $A$ *yı en büyük yapmak için* $n$ *yi en büyük seçmek gerekmektedir.* $n^2 < 20$ *ise* $n = 0, 1, 2, 3, 4$ *olabililir. Buna göre* $n$ *en büyük* $4$ *dür. Böylece* $A = 20.4 + 16 = 96$*,* $A$ *nın en büyük değeridir.*

**Sonuç 1.7.4** $A$ *sayısının* $B$ *ile bölümünden kalan* $x$*,* $C$ *sayısının* $B$ *sayısına bölümünden kalan* $y$ *olsun. Bu durumda,*

**1.** $A + C$ *nin* $B$ *ile bölümünden kalan* $x + y$ *dir.*

**2.** $A.C$ *nin* $B$ *ile bölümünden kalan* $x.y$ *dir.*

**3.** $k.A$ *nın* $B$ *ile bölümünden kalan* $k.x$ *dir.*

**4.** $A^k$ *nın* $B$ *ile bölümünden kalan* $x^k$ *dır.*

*Burada kalanlar* $B$ *den büyük ise tekrar* $B$ *ye bölünür ve kalan bulunur.*

## Problemler

1. Bir bölme işleminde, bölen 12, bölüm 5 ve kalan 8 ise bölünen sayıyı bulunuz.

2. Verilen bölme işlemlerine göre $A$ sayısının 12 ile bölümünden kalanı bulunuz.

$$\begin{array}{c|l} \text{A} & 4 \\ \cline{2-2} \vdots & \text{B} \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} \text{B} & 3 \\ \cline{2-2} \vdots & \text{C} \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

3. Verilen bölme işlemlerine göre $A$ sayısının 15 ile bölümünden kalanı bulunuz.

$$\begin{array}{c|l} \text{A} & 6 \\ \cline{2-2} \vdots & \text{B} \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} \text{B} & 5 \\ \cline{2-2} \vdots & \text{C} \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

4. Üç basamaklı $ab2$ sayısı iki basamaklı $ab$ sayısına bölündüğünde elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.

5. $A$ nın 8 ile bölümünden kalan 2, $C$ nin 8 ile bölümünden kalan 4 ise $A + C$ ve $A.C$ nin 8 ile bölümünden kalanları bulunuz.

6. Verilen bölme işlemine göre $A$ en az kaç olabilir?

$$\begin{array}{c|l} \text{A} & \text{n} \\ \cline{2-2} \vdots & 8 \\ \cline{1-1} 11 & \end{array}$$

## 1.8 Asal Çarpanlar

**Tanım 1.8.1** *1'den ve kendisinden başka böleni olmayan dogal sayıya (1 den farklı)* ***asal sayı*** *denir.* $2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ *asal sayılardır. Dikkat edilirse 2 hem asal hemde çift olan biricik asal sayıdır. 2 dışındaki bütün asal sayılar tektir.*

**Örnek 1.8.2** 12 *sayısının asal sayı bölenleri* $2,3$ *tür.*

**Örnek 1.8.3** 30 *sayısının asal sayı bölenleri* $2,3,5$ *tir.*

Bir $A$ doğal sayısı asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir. $12 = 4.3 = 2^2.3$ şeklinde olduğundan 12, 2 ve 3 asallarının çarpımı şeklinde yazılabilir. Bir doğal sayıyı asal çarpanlarına ayırmak için, bu sayıyı en küçük asaldan başlayarak bölünen sayı 1 olana kadar böleriz. Elde edilen asallar çarpıldığında sayı, asalların çarpımı şeklinde yazılmış olur.

**Örnek 1.8.4** 150 *sayısını asal çarpanlarına ayıralım.*

*Çözüm:*

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & - \end{array}$$

*olduğundan* $150 = 2.3.5^2$ *şeklinde yazılabilir.* 150 *nin* 3 *tane asal sayı böleni vardır.*

**Örnek 1.8.5** 90 *sayısını asal çarpanlarına ayıralım.*

*Çözüm:*

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & - \end{array}$$

*olduğundan* $90 = 2.3^2.5$ *şeklinde yazılabilir.*

**Örnek 1.8.6** *$x$ ve $y$ birer pozitif tam sayı olsun. $y^2 = 12.x$ olduğuna göre $x + y$ nin en küçük değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $12 = 2^2.3$ *olduğu açıktır.* $y^2 = 2^2.3.x$ *eşitliğini sağlayan en küçük $x$ ve $y$ için $x = 3$ alınmalıdır. $x = 3$ için $y^2 = 6^2$ eşitliğinden $y = 6$ elde edilir. Buna göre $x + y = 3 + 6 = 9$ dır.*

**Örnek 1.8.7** $5! = 2^n.A$ *ise* $n$ *en fazla kaçtır?*

*Çözüm:* $5!$ *içerisindeki* $2$ *çarpanlarının sayısını bulmalıyız. Açktır ki* $5! = 5.4.3.2.1$ *olduğundan* $5! = 5.4.3.2.1 = 5.3.2^3$ *yazılabilir. Bu halde* $n = 3$ *dür.*

*Diğer bir yol ise* $5$ *sayısı* $2$ *nin kuvvetlerine bölünür ve bölümler toplanır.*

$5$, $2$ *ye bölünürse bölüm* $2$, $5$, $4$ *e bölünürse bölüm* $1$ *dir.* $n = 2 + 1 = 3$ *dür.*

Ayrıca bir doğal sayının pozitif sayı bölenlerinin sayısı bulunmak istenebilir. Bu durumda, bu sayı asal sayıların çarpımı biçimde yazıldıktan sonra herbir asalın kuvvetine 1 ekleyerek kuvvetler çarpılır ve elde edilen sayı bu sayının pozitif bölenlerinin sayısıdır. Yani $x, y, z$ asal sayılar ve $A$ dogal sayısı

$$A = x^m y^n z^r$$

olsun. Bu halde $A$ doğal sayısının pozitif bölenlerinin sayısı

$$(m + 1)(n + 1)(r + 1)$$

dir.

**Örnek 1.8.8** $150$ *sayısının pozitif bölenleri sayısını bulalım.*

*Çözüm:* $150 = 2.3.5^2$ *olduğundan* $150$ *nin pozitif bölenlerinin sayısı*

$$(1 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 2.2.3 = 12$$

*dir.* $2.12 = 24$ *de* $150$ *nin tam sayı bölenlerinin sayıdır.*

**Tanım 1.8.9** $1$*'den başka ortak böleni olmayan sayılara* ***aralarında asal sayılar*** *denir.* $8$ *ve* $9$ *aralarında asal sayılardır. Çünkü ikisininde ortak böleni* $1$ *dir.* $12$ *ve* $9$ *aralarında asal sayılar değildirler.* $12$ *ve* $9$*'u* $1$ *dışında* $3$ *de böler.* $9$, $12$ *ve* $25$ *aralarında asal sayılardır.*

**Sonuç 1.8.10** **1.** *Ardışık pozitif sayılar aralarında asaldırlar.*

**2.** *Bir* $n$ *doğal sayısıyla* $1$ *aralarında asal sayılardır.*

## Problemler

1. 250 yi asal sayıların çarpımı şeklinde yazınız.

2. 144 yi asal sayıların çarpımı şeklinde yazınız.

3. 360 sayısının tam sayı bölenleri sayısını bulunuz?

4. $x$ ve $y$ birer pozitif tam sayı olsun. $y^3 = 12.x$ olduğuna göre $x + y$ nin en küçük değerini bulunuz.

5. $6^n.12$ sayısının 112 tane tam sayı böleni varsa $n$ kaçtır?

6. $8^8.25^5$ sayısı kaç basamaklıdır?

## 1.9 Bölünebilme kuralları

$2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11$ ile bölünebilme kurallarını verelim.

- **2 ile bölünebilme**: Birler basamağındaki rakam $0, 2, 4, 6, 8$ olan sayılar iki ile tam bölünür. Çift sayıların diğer bir tanımı bu şekilde verilir. Bir sayı 2 ile tam bölünmüyorsa kalan 1 dir.

- **3 ile bölünebilme**: Bir sayının rakamları toplamı 3 ün katı ise 3 e bölünür. 3 e bölünmüyorsa kalan 1 yada 2 dir. Kalanı bulmak için sayının rakamları toplamını 3 e bölüp kalanı bulmak yeterlidir.

- **4 ile bölünebilme**: Bir sayının son iki basamağı 4 e bölünürse bu sayı 4 e bölünür(son iki basamak 00 da olabilir.). bir sayının 4 ile bölündüğünde kalanı bulmak için, sayının son iki basamağının 4 ile bölümünden kalanı bulmak yeterlidir.

- **5 ile bölünebilme**: Bir sayının birler basamağında 0 veya 5 varsa bu sayı 5 e bölünür. Kalanı bulmak için sayının birler basamağındaki rakamın (5 den küçük ise kendisidir) 5 e bölümünden kalanı bulmak yeterlidir.

- **8 ile bölünebilme**: Bir sayının son üç basamağı 8 e bölünüyor ise bu sayı 8 e bölünür(son üç basamak 000 da olabilir.).

- **9 ile bölünebilme**: Bir sayının rakamları toplamı 9 un katı ise bu sayı 9 a bölünür. Bir sayının 9 ile bölümden kalanı bulmak için sayının rakamları toplamını 9 a bölüp kalanı bulmak yeterlidir.

- **10 ile bölünebilme**: Bir sayının birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 a bölünür. Sayının birler basamağındaki rakam 0 değil ise sayının 10 ile bölümünden kalan birler basamağındaki rakamdır.

- **11 ile bölünebilme**: Verilen bir doğal sayının rakamları sağdan sola doğru +, − diye işaretlenir. − ler + lardan çıkarılır. Elde edilen sonuç 11 in bir katı ise bu sayı 11 ile bölünür.

**Örnek 1.9.1** **1.** 1982 *sayısı* 2 *ile bölünür.* 3542687 *sayısının* 2 *ile bölümünden kalan* 1 *dir.*

**2.** 1356 *sayısının rakamları toplamı* $1+3+5+6=15=3.5$ *olduğundan bu sayı* 3 *e bölünür.*

**3.** 2340 *sayısı* 4 *e bölünür. Çünkü son iki basamağı* $20=4.5$ *olduğundan,* 4 *e bölünür.*

**4.** 125635 *ve* 25690 *sayılarının birler basamağında* 5 *ve* 0 *olduğu için bu sayılar* 5 *e bölünür.*

**5.** 1256 *ve* 9561 *sayılarının* 5 *ile bölümünden kalan* 1 *dir.*

**6.** 35694 *sayısının rakamları toplamı* $3+5+6+9+4=27$ *ve* 27, 9*'un katı olduğundan bu sayı* 9 *a bölünür.*

**7.** 246580 *sayısı* 10 *ile bölünür.*

**8.** 2569 *sayısının* 10 *ile bölümünden kalan* 9 *dur.*

**9.** 83831 *sayısı* 11 *ile bölünür. Çünkü sayının rakamlarını sağdan başlayarak* +, − *diye işaretlersek,*

$$\underbrace{83831}_{+-+-+}$$

*ve*

$1+8+8-(3+3)=17-6=11$

*olduğundan* 83831 *sayısı* 11 *ile bölünür.*

**Örnek 1.9.2** $8a$ *sayısı hem 2 ile hem de 3 ile bölünüyor ise a nın alabileceği değerleri bulunuz.*

*Çözüm:* $8a$ *sayısının 2 ile bölünebilmesi için* $a$ $0, 2, 4, 6, 8$ *değerlerinden birini alabilir. Buna göre*

$a = 0$ *için* $8 + 0 = 8$*, 3 ün katı olmadığından 3 e bölünmez.*

$a = 2$ *için* $8 + 2 = 10$*, 3 ün katı olmadığından 3 e bölünmez.*

$a = 4$ *için* $8 + 4 = 12$*, 3 ün katı olmaduğundan 3 e bölünür.*

$a = 6$ *için* $8 + 6 = 14$*, 3 ün katı olmadığından 3 e bölünmez.*

$a = 8$ *için* $8 + 8 = 16$*, 3 ün katı olmadığından 3 e bölünmez.*

*Böylece* $a$ *sadece 4 değerini alabilir.*

**Örnek 1.9.3** $2a7b$ *sayısı 3 ile tam bölünüyor ve 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veriyor ise a nın alabileceği değerleri bulunuz.*

*Çözüm:* $2a7b$ *sayısının 5 ile bölündüğünde 2 kalanı vermesi için* $b = 2$ *veya* $b = 7$ *olabilir.*

$b = 2$ *için* $2a72$ *sayısının rakamları toplamını 3 ün katı yapan* $a$ *değerlerini bulmalıyız.* $2a72$ *rakamları toplamı* $2 + a + 7 + 2 = 11 + a$ *dır.*

$a = 1$ *için rakamları toplamı 12, 3 ün katıdır.*

$a = 4$ *için rakamları toplamı 15, 3 ün katıdır.*

$a = 7$ *için rakamları toplamı 18, 3 ün katıdır.*

*Böylece* $b = 2$ *için* $a = 1, 4, 7$ *dir.*

$b = 7$ *için* $2a77$ *sayısının rakamları toplamını 3 ün katı yapan* $a$ *değerlerini bulmalıyız.* $2a77$ *rakamları toplamı* $2 + a + 7 + 7 = 16 + a$ *dır.*

$a = 2$ *için rakamları toplamı 18, 3 ün katıdır.*

$a = 5$ *için rakamları toplamı 21, 3 ün katıdır.*

$a = 8$ *için rakamları toplamı 24, 3 ün katıdır.*

*Böylece* $b = 7$ *için* $a = 2, 5, 8$ *dir.*

*İki durumun sonucunda* $a = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ *değerlerini alabilir.*

**Örnek 1.9.4** 454545454 *sayısının* 9 *ile bölümünden kalanını bulunuz.*
*Çözüm:* 454545454 *sayısının rakamları toplamı* $4+5+4+5+4+5+4+5+4 = 40$ *dır.* 40, 9 *bölündüğünde kalan* 4 *olduğundan* 454545454 *sayısının* 9 *ile bölümünden kalan* 4 *dür.*

**Örnek 1.9.5** 152649 *sayısının* 4 *ile bölümünden kalanını bulunuz.*
*Çözüm:* 152649 *sayısının son iki basamağı olan* 49 *nun* 4 *ile bölümünden kalan* 1 *olduğundan* 152649 *sayısının* 4 *ile bölümünden kalan* 1 *dir.*

**Örnek 1.9.6** $6x8y$ *sayısı* 9 *ile tam bölünüyor ve* 10 *bölündüğünde* 4 *kalanı verdiğine göre* $x$ *hangi değerleri alabilir.*
*Çözüm:* $6x8y$ *sayısı* 10 *ile bölünmdüğünde* 4 *kalanı veriyorsa* $y = 4$ *dür. Bu halde* $y = 4$ *için* $6x84$ *sayısının rakamları toplamını* 9 *un katı yapan* $x$ *rakamları bulunmalıdır.* $6x84$ *rakamaları toplamı* $6 + x + 8 + 4 = 18 + x$ *olduğundan*

$x = 0$ *için sayının rakamları toplamı* 18 *olduğundan* 9 *un katıdır.*

$x = 9$ *için sayının rakamları toplamı* 27 *olduğundan* 9 *un katıdır.*

*Böylece* $x = 0, 9$ *olabilir.*

$a$ ve $b$ aralarında asal sayılar ve bir sayı hem $a$ ya hem de $b$ ye bölünür ise $a.b$ ye de bölünür. Bu durum $a$ ve $b$ aralarında asal sayılar değil ise geçerli değildir. Örneğin, 36 hem 6 ya hem de 4 e bölünür. Fakat 36, $6.4 = 24$ e bölünmez. Burada aşağıdaki durumları verebiliriz: Bir sayı

**1.** 2 ve 3 e bölünür ise 6 ya bölünür,

**2.** 2 ve 5 e bölünür ise 10 a bölünür,

**3.** 2 ve 9 a bölünür ise 18 e bölünür,

**4.** 3 ve 4 e bölünür ise 12 ye bölünür,

**5.** 3 ve 5 e bölünür ise 15 e bölünür,

**6.** 4 ve 5 e bölünür ise 20 ye bölünür,

**7.** 5 ve 6 ya bölünür ise 30 a bölünür,

**8.** 5 ve 8 e bölünür ise 40 a bölünür,

**9.** 5 ve 9 a bölünür ise 45 e bölünür,

**10.** 5 ve 6 ya bölünür ( yada 2,3, ve 5) ise 30 a bölünür

**11.** 5 ve 12 ye bölünür( yada 3,4, ve 5) ise 60 a bölünür

Benzer şekilde daha fazla özellik üretilebilir.

**Not 1.9.7** *Bir sayı* $x.y$ *ye bölünüyor ise hem* $x$ *e hemde* $y$ *ye bölünür. Örneğin,* 6*,* 36 *yı böldüğünden* 2 *ve* 3 *de* 36 *yı böler.*

**Problemler**

1. 646464 sayısısının 3, 4, 5, 8, 9 ve 10 ile bölümünden kalanı bulunuz.
2. 9898 sayısısının 3, 4, 5, 8, 9 ve 10 ile bölümünden kalanı bulunuz.
3. $45ab$ sayısı 3 ve 5 ile tam bölündüğüne göre $a$ nın alabileceği değerleri bulunuz.
4. $6x3y$ sayısı 5 ile bölünüyor ve 9 ile böldüğünde 4 kalanı verdiğine göre $x$ hangi değerleri alabilir.
5. $a24b$ sayısı 4 ve 9 a bölünür ise $a$ nın alabileceği değerleri bulunuz.
6. $25ab$ sayısı 15 ile bölündüğüne göre $a$ nın alabileceği değerleri bulunuz.
7. $1a48b$ sayısı 12 ile bölündüğüne göre $a$ nın alabileceği değerleri bulunuz.
8. $150 \leq x \leq 450$ ise kaç tane $x$ sayısı hem 3 e hemde 4 e bölünür?

## 1.10 OBEB ve OKEK

### 1.10.1 OBEB (En büyük ortak bölen)

**Tanım 1.10.1** *Sıfırdan farklı en az iki sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne, bu sayıların obeb i (**en büyük ortak böleni**) denir.* $A$ *ve* $B$ *sayılarının obeb i* $x$ *ise* $obeb(A, B) = x$ *ile yazılır.* $obeb(A, B) = x$ *ise tanımdan* $x$ *sayısı hem* $A$ *yı hem de* $B$ *yi bölen en büyük sayıdır.*

**Örnek 1.10.2** 24 *ve* 36 *nın obeb ini bulalım.*

*Çözüm:*

24 ün bölenleri:$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

36 nın bölenleri:$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

24 ve 36 nın bölenlerine bakılırsa ortak bölenler mevcuttur. Ortak bölenlerin en büyüğü 12 olduğundan $obeb(24, 36) = 12$ dir.
Daha büyük sayıların *obeb* ini bulmak için bu sayıları ortak bölen asallar bulunur ve çarpılır. $obeb(24, 36)$ yı bulmak için 24 ve 36 yı bölen asallar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{cc|l} 24 & 36 & 2^* \\ 12 & 18 & 2^* \\ 6 & 9 & 3^* \\ 2 & 3 & - \end{array}$$

Her iki sayıyıda bölen asal sayıları çarparak, $obeb(24, 36) = 2^2.3 = 12$ dir.

### 1.10.2 OKEK (En küçük ortak kat)

**Tanım 1.10.3** *Sıfırdan farklı en az iki sayının ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların okek i (**en küçük ortak katı**) denir. $A$ ve $B$ nin en küçük ortak katı $y$ ise $okek(A, B) = y$ ile yazılır. $okek(A, B) = y$ ise tanımdan $y$, $A$ ve $B$ nin böldüğü sayıların en küçüğüdür.*

**Örnek 1.10.4** 24 *ve* 36 *nın okek ini bulalım.*

*Çözüm:*

24 ün böldüğü sayılar:$24, 48, \mathbf{72}, 96, 120, \mathbf{144}, ...$

36 nın böldüğü sayılar:$36, \mathbf{72}, 108, \mathbf{144}, ...$

24 ve 36 nın katlarına (böldüğü sayılara) bakılırsa ortak katlar vardır. Ortak katların en küçüğü 72 olduğundan $okek(24, 36) = 72$ dir.
Daha büyük sayıların *okek* ini bulmak için bu sayılar asal çarpanlarına ayrılır ve en büyük üslüler çarpılır. $okek(24, 36)$ yı bu şekilde bulunmak istenirse

$$\begin{array}{cc|c} 24 & 36 & 2^* \\ 12 & 18 & 2^* \\ 6 & 9 & 3^* \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & - \end{array}$$

Sağ taraftaki bütün asallar çarpılırsa $okek(24,36) = 2^3.3^2 = 72$ elde edilir.

**Not 1.10.5** *$obeb(24,36) = 12$ ve $okek(24,36) = 72$ olduğundan şu ifadeleri yazabiliriz:*

$obeb(24,36) = 12 < 24 < 36 < 72 = okek(24,36)$

*ve*

$24.36 = 864 = obeb(24,36).okek(24,36)$

**Sonuç 1.10.6** *$A$ ve $B$ sıfırdan farklı birer doğal sayı olmak üzere $A < B$ ise*

$$obeb(A,B) \leq A < B \leq okek(A,B)$$

*dir.*

**Sonuç 1.10.7** *$A$ ve $B$ sıfırdan farklı birer doğal sayı olmak üzere*

$$A.B = obeb(A,B).okek(A,B)$$

*dir.*

**Sonuç 1.10.8** *$A$ ve $B$ sıfırdan farklı birer doğal sayı ve aralarında asal iseler*

$obeb(A,B) = 1$

$okek(A,B) = A.B$

*olduğu açıktır.*

## Problemler

1. $obeb(120,150) = ?$, $okek(120,150) = ?$

2. $obeb(60, 90, 120) =?$, $okek(60, 90, 120) =?$

3. $x$ pozitif bir tam sayı olsun. $obeb(20, x) = 10$ ise $x$ in en küçük değerini bulunuz.

4. $x$ pozitif bir tam sayı olsun. $okek(20, x) = 40$ ise $x$ in en büyük değerini bulunuz.

5. $x$ ve $y$ birer pozitif bir tam sayı olsun. $okek(20, x) = y$ ise $x+y$ nin en küçük değerini bulunuz.

6. $x$ ve $y$ birer pozitif bir tam sayı olsun. $okek(x, y) = 20$ ise $x+y$ nin en küçük değerini bulunuz.

7. $x$ ve $y$ birer pozitif bir tam sayı olsun. $obeb(x, y) = 20$ ise $x+y$ nin en küçük değerini bulunuz.

8. $a$ ve $b$ pozitif tam sayılar olmak üzere $obeb(a, b) = 1$, $okek(a, b) = 24$ ise $a+b$ kaçtır?

9. $a$ ve $b$ aralarında asal sayılar olmak üzere $obeb(a, b) + okek(a, b) = 91$ ise $a.b$ kaçtır?

10. $x$ pozitif bir tam sayı olsun. $obeb(24, x) = a$ ve $okek(a, 6) = 24$ ise $x$ en az kaçtır?

### 1.10.3 OBEB ve OKEK içeren bazı problemler

**Örnek 1.10.9** $24, 36$ *ve* $48$ *ile tam bölünen en küçük doğal sayıyı bulunuz.*

Çözüm: *Bu sayı* $okek(24, 36, 48)$ *dır. Buna göre* $okek(24, 36, 48) = 144$ *dür.*

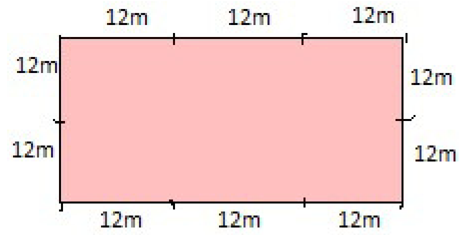
**Örnek 1.10.10** $20, 30, 40$ *ile bölündüğünde* $8$ *kalanı veren en küçük doğal sayıyı bulunuz.*

Çözüm: $20, 30, 40$ *ile bölündüğünde* $8$ *kalanı veren en küçük doğal sayı* $A$ *olsun. Bu halde*

$$A = 20p + 8 = 30q + 8 = 40r + 8$$

*dir. Yukarıdaki eşitliklerden*

$$A - 8 = 20p = 30q = 40r$$




Şekil 3: Ağaç sayısı problemi için basit bir grafik

*dır.* $okek(20, 30, 40) = 120$ *olduğundan* $A - 8$ *en küçük* 120 *dir. Böylece* $A - 8 = 120$*,* $A = 128$*,* $A$ *nın en küçük değeridir.*

**Örnek 1.10.11** *Kenar uzunlukları* $24m$ *ve* $36m$ *olan dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın çevresine köşelerde birer ağaç olma şartıyla en az kaç ağaç dikilir.*

Çözüm: *Ağaç sayısının en az olması için iki ağaç arasındaki mesafenin en uzun seçilmesi gerekmektedir. Bu durumda* $24m$ *ve* $36m$ *yı bölen en büyük sayı (yani* $obeb(24, 36)$*) iki ağaç arasındaki mesafe olmalıdır.*

$obeb(24, 36) = 12$ *dir. Şekil 3 deki gibi basit bir grafik yardımıyla cevabın* 10 *olduğu görülebilir.*

*Alternatif bir formül için ağaç sayısı* $AS$*, dikdörtgenin kenar uzunlukları* $a$ *ve* $b$*, dikdörtgenin çevre uzunluğu* $CU = 2(a + b)$

$$AS = \frac{CU}{obeb(a,b)} = \frac{2(a+b)}{obeb(a,b)}$$

*ifadesiyle*

$$AS = \frac{2(24+36)}{12} = 10$$

*elde edilir.*

## Problemler

1. $9, 18, 24$ ile tam bölünen en küçük doğal sayıyı bulunuz.

2. $15, 18, 24$ ile bölündüğünde 12 kalanı veren dört basamaklı en küçük doğal sayıyı bulunuz.

3. 12 ile bölündüğünde 8, 15 ile bölündüğünde 11, 18 ile bölündüğünde 14 kalanı veren en küçük doğal sayıyı bulunuz.

4. Ali cevizlerini 9 ar, 12 şer ve 15 şer saydığında hep 6 ceviz artıyor. Ali nin cevizlerinin sayısı üç basamaklı bir sayı olduğuna göre Ali nin en az kaç cevizi vardır?

5. Yuvarlak bir pistin çevresi birinci koşucu $18dk$, ikinci koşucu $24dk$ ve üçüncü koşucu $36dk$ da koşuyorlar. Bu üç koşucu aynı yönde, aynı noktadan saat $10:00$ da koşmaya başlıyorlar. Buna göre bu üç koşucu ikinci kez saat kaçta üçü yan yana gelir?

6. Toplamları 25, okekleri 84 olan sayılardan küçüğü kaçtır?

7. Kenar uzunlukları $24m$ ve $36m$ olan dikdörtgen biçimindeki bir odanın içerisine kare biçiminde fayans döşenmek isteniyor. En az kaç fayansa ihtiyaç vardır?

8. Boyutları 6, 9 ve 12cm olan kutulardan en küçük hacimli bir küp yapılmak isteniyor. Kaç tane kutuya ihtiyaç vardır?

9. 30, 45 ve 60 metre uzunluklu boyutlara sahip bir kutunun içine hiç boşluk olmayacak şekilde küpler yerleştirilecektir. En az kaç küp gerekmektedir?

10. Kenar uzunlukları $24m$ ve $36m$ olan dikdörtgen biçimindeki bir odanın içine fayans döşenmek isterse, fayans sayısı en az olacak şekilde fayansların alanını ve en az kaç fayansa ihtiyaç olduğunu bulunuz?

## Bölüm Problemleri

1. (a) Tam sayı olmayan bir rasyonel sayı yoktur.

   (b) Rasyonel sayı olmayan bir tam sayı yoktur.

   (c) Bazı rasyonel sayılar bir tam sayıdır.

   Yukarıdaki ifadelerden hangileri dogrudur.

2. $a$ ve $b$ birer doğal sayı olmak üzere $a + b = 18$ ise $a.b$ nin en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

3. $a$, $b$ ve $c$ birer doğal sayı olmak üzere $2a + 3b + 4c = 55$ ise $c$ nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

4. $x$, $y$ ve $z$ pozitif doğal sayılar olmak üzere $3x = 5y$, $4y = 2z$ eşitliğini sağlansın. $x + y + z$ nin en küçük değerini bulunuz?

5. $x < 0$ ve $y > 0$ ise $x^2y^3$, $y^5x^7$, $x^4y^4$ ün işaretlerini belirleyiniz.

6. $m$ çift, $n$ tek ise $mn + 2$, $m^2 - n^2 + 7$, $m^3 + n^4 + 7n - 7$ nin tek mi çift mi olup olmadığını belirleyiniz.

7. $-(-2) + (-2)[-(-2) - 4] =?$

8. $\dfrac{(-1-(-4))}{(2-(+5))} - \dfrac{4.(-2+(-1))}{(-1-5)} =?$

9. $(x - y) - (-x) - [-(y - x) - (-y)] =?$

10. $(-2)(-a) - (-a) + 3(-a) =?$

11. $-4(-1 - (-3)).(2 - (+3)) + 5 =?$

12. $-2 - (6 - (-2)) : (-2 - (+2)) =?$

13. $(-1)^0 - (-1)^1 - (-1)^2 =?$

14. $-(-2)^2 - (-2)^1 =?$

15. $(-3)^0 + (-3)^1 - (-3)^2 - (-3)^3 =?$

16. $(-2)^0 - 2(-3)^1 - (-2)(-3)^2 =?$

17. $\dfrac{10^4.6^5}{25^2.2^9} = ?$

18. $x = 2+3+4+...+15$ ve $y = 6.5+9.5+12.5+...+25.5$ olsun. $y$ sayısı $x$ sayısının kaç katıdır?

19. $A = 3x+4y+5z+7t$ ifadesindeki $x, y, z, t$ sayıları 2 arttırılırsa toplam ne kadar artar?

20. $4^4.5^8$ sayısı kaç basamaklıdır?

21. $18.6.15.n$ sayısı bir sayının küpü ise $n$ en az kaçtır?

22. $y^2 = 18.x$ ise $x+y$ en az kaçtır?

23. $2^n = x$ ise $8^{n+1}$ in $x-$ türünden eşitini bulunuz?

24. $2^n = x$, $3^n = y$ ise $24^{n+1}$ in $x$ ve $y$ türünden eşitini bulunuz?

25. $B = 8^2.81^2.5^4$ sayısı $A = 4^4.9^2.25^3$ sayısının kaç katıdır?

26. $a$, $b$, $c$ ardışık tek sayılar ve $a < b < c$ ise $(c-b)(b-a)(c-a) = ?$

27. $a$, $b$, $c$ ardışık 3 ün katı olan sayılar ve $a < b < c$ ise $(c-b)(b-a)(c-a) = ?$

28. 3 ün katı olan 5 ardışık sayının toplamı 330 ise bu sayıların en büyüğünü bulunuz?

29. $40+42+44+...+78+80 = ?$

30. $10+14+18+...+52$ toplamını bulunuz?

31. Bir toplama işlemindeki 5 tane üç basamaklı doğal sayının yüzler basamağı 2 arttırılıyor, onlar basamağı 8 azaltılıyor ve birler basamağı 6 artılıyor ise bu toplamadaki değişimi bulunuz?

32. $aaa$ üç basamaklı, $aa$ iki basamaklı sayılar ve $aaa - aa + a = x.a$ ise $x$ kaçtır?

33. $15^4.8^n$ sayısının 250 tane pozitif sayı böleni var ise $n$ kaçtır?

34. $A = 15p+8 = 20r+8 = 30s+8$ eşitliğini sağlayan dört basamaklı en küçük doğal sayıyı bulunuz?

35. (DGS2013) $ABC$ ve $CBA$ üç basamaklı dogal sayılar ve $ABC+CBA=786$ olduğuna göre $A+B+C$ değerini bulunuz?

36. (DGS2013) Rakamları arasında $A=B+2$, $C=A+B$ ilişkisi olan üç basamaklı $ABC$ sayılarını bulunuz?

37. $a+b=5$ ve $2a+2b+3c=55$ ise $c$ kaçtır?

38. (DGS2013) $-7-3(-5)-4=?$

39. (DGS2013) $a$, $b$ birbirinden farklı pozitif tam sayılar ve $(a+b)(1+a-b)=52$ ise $a.b$ kaçtır?

40. (DGS2013) $a$, $b$ ve $c$ sayılar olmak üzere $b<0<a+b<b+c$ olduğuna göre $a,b,c$ sayılarını sıralayınız?

41. (DGS2013) $A=3+6+9+...+27$ ve $B=5+10+15+...+x$ olsun. $5A=3B$ ise $x$ kaçtır?

42. (DGS2013) Rakamları arasında $A=B+2$, $C=A+B$ ilişkisi olan kaç tane $ABC$ üç basamaklı dogal sayı vardır?

43. (DGS2013) Üç basamaklı $ABB$ sayısı 4 e ve 9 a kalansız bölündüğüne göre $A+B$ nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

44. (DGS2013) $a^2b<0$, $a-b<0$, $abc<0$ olduğuna göre $a,b,c$ sayılarının işaretlerini belirleyiniz?

45. (DGS2013) $x$ ve $y$ birer tam sayı olmak üzere $2^{x-y}>9$, $3^{x+y}>10$ ise $x$ in alabileceği en küçük değer kaçtır?

46. (DGS2013) $27^6$ doğal sayısı 9 tabanda yazıldığında kaç basamaklı bir sayı elde edilir?

47. (DGS2012) Üç basamaklı $1A6$ sayısı 3 e tam bölünüyor. Buna göre, $A$ nın alabileceği değerler toplamını bulunuz?

48. (DGS2012) $x,y$ ve $z$ pozitif tam sayılar olmak üzere $x=4y+5$, $y=6z+3$ ise $x$ in 12 ile bölümünden kalanı bulunuz?

49. (DGS2012) $A, B$ ve $C$ tam sayıları için $1 < A < B < C < 7$ eşitsizlikleri verilsin. Buna göre, $A$ ile $C$ aralarında asal olacak şekilde kaç tane üç basamaklı $ABC$ doğal sayısı yazılabilir?

50. (DGS2012) $a$ ve $b$ aralarında asal, 12 den küçük iki tam sayılar ise $a.b$ en fazla kaç olabilir?

51. (DGS2012) İki basamaklı bir $MN$ sayısı $M + N$ ile bölündüğünde bölüm 5, kalan 13 tür. İki basamaklı $NM$ sayısı $N + M$ ile bölündüğünde ise bölüm 5, kalan 4 tür. Buna göre, $M + N$ toplamı kaçtır?

52. (DGS2012) $ABC$ ve $DEF$ üç basamaklı dogal sayılar ve $D-A = 2$, $B-E = 3$, $C - F = 4$ ise $ABC - DEF$ farkı kaçtır?

53. (DGS2012) $5A + B6 = C43$ toplama işlemine göre $A + B + C$ kaçtır?

54. (DGS2012) $x$ sayısı sıfırdan farklı , $y$ sayısının $-3$ katı olduğuna göre $3(x-y)$ sayısı $y$ nin kaç katıdır?

55. (DGS2012) $12 - [5 - 8 - (-7)] =?$

56. (DGS2012) $A$ ve $B$ sıfırdan farklı birer rakam olmak üzere $A = 2B$ koşulunu saglayan $A1B$ biçimindeki tüm üç basamaklı dogal sayıların toplamı kaçtır?

57. (DGS2012) Üç basamaklı $2AA$ sayısı ile iki basamaklı $1A$ sayısının toplamı $A$ sayısının 82 katına eşittir. Buna göre $A$ kaçtır?

58. (DGS2012) $1, 2, 3, 4$ rakamları kullanılarak oluşturulan rakamları farklı üç basamaklı dogal sayıların kaç tanesi 300 den küçüktür?

59. (DGS2008) $a$ ve $b$ birer pozitif tam sayı olmak üzere $a+b+a.b = 51$ ise $a+b$ en çok kaç olabilir?

60. (DGS2009) $a$, $b$ ve $c$ sayıları için $a + c = 3$, $ab + c = 14$, $a + bc = 16$ ise $b$ kaçtır?

# 2 RASYONEL SAYILAR

## 2.1 Rasyonel sayı

Bazı sayılar vardır ki önceki bölümde verdiğimiz sayıların içinde yoktur. Örneğin, 2 ve 3 birer tam sayıdır. Ama bu iki sayıyı kullanarak yazılan

$$\frac{2}{3}$$

sayısı ne bir doğal sayıdır ne de bir tam sayıdır. Buradan yola çıkarak, tam sayıları kullanarak yazılabilen yeni sayılar tanımlanabilir.

**Tanım 2.1.1** *$a$ ve $b$ birer tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere*

$$\frac{a}{b}$$

*şeklindeki sayılara rasyonel sayılar denir.*

**Örnek 2.1.2** $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{-9}, \frac{5}{1}$ *birer rasyonel sayıdır.*

**Not 2.1.3** **1.** *$a$ bir tam sayı olmak üzere*

$$a = \frac{a}{1}$$

*olduğundan her bir tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.*

**2.** $\frac{a}{0}$ *bir sayı değildir.*

**3.** $\frac{a}{1} = a$ *dır.*

**4.** *$b \neq 0$ olmak üzere* $\frac{0}{b} = 0$ *dır.*

**Not 2.1.4** $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}, \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}, \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ *yazılabilir.*

### 2.1.1 Kesirler

**Tanım 2.1.5** *Bir bütünün eş parçalarından bazılarını göstermeye yarayan rasyonel sayılara **kesir** denir.*

$\dfrac{a}{b}$ kesrinde, $a$ nın bulunduğu yere pay, $b$ nin bulunduğu yere payda ve aradaki çizgiye ise kesir çizgisi denir. $\dfrac{a}{b}$ kesri ile bir bütünün $b$-eş parçaya bölünüp $a$ parçasını ifade edilmektedir.

**Örnek 2.1.6** $\dfrac{1}{2}$ *kesri bir bütünü iki eş parçaya bölüp bir tanesini ifade etmek için kullanılır. Bu duruma, bir bütünün yarısı da denir. Bu kesir* 2 *de* 1 *şeklinde de okunur.*

**Örnek 2.1.7** $\dfrac{1}{4}$ *kesri bir bütünü dört eş parçaya bölüp bir tanesini ifade etmek için kullanılır. Bu duruma, bir bütünün çeyreği denir. Bu kesir* 4 *de* 1 *şeklinde de okunur.*

**Örnek 2.1.8** 200 *sayısının* $\dfrac{3}{4}$ *nü bulalım.*
*Çözüm: Aşağıda verilen tablo ile kesir tanımı düşünülürse bütünü* 200 *olarak alırsak bu bütünü* 4 *eş parçaya bölüp* 3 *parçası alınırsa,* 200 *ün* $\dfrac{3}{4}$ *nün* 150 *olduğu bulunur.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *50* | *50* | *50* | *50* |

**Bir kesrin genişletilmesi ve sadeleştirilmesi**

**Tanım 2.1.9** $\dfrac{a}{b}$ *kesrinin pay ve paydasını sıfırdan farklı bir tam sayı ile çarpılarak*

$$\frac{a.k}{b.k}$$

*kesrini elde etmeye* ***genişletme*** *denir.*

$$\frac{a.k}{b.k}$$

*kesri için pay ve paydadaki ortak* $k$ *çarpanlarını yok ederek* $\dfrac{a}{b}$ *kesrini elde etmeye* ***sadeleştirme*** *denir. Genişletme veya sadeleştirme yapıldığında başlanğçtaki kesre eşit kesirler bulunmuş olur. Bu yöntemle bir rasyonel sayının farklı yazımlarının olduğu görülmektedir.*

**Örnek 2.1.10** $\dfrac{2}{3}$ *kesrini* 5 *ile genişletelim. Bu halde*

$$\frac{2}{3} = \frac{2.5}{3.5} = \frac{10}{15}$$

**Örnek 2.1.11** $\frac{36}{24}$ *kesrini en sade biçimde yazınız.*

Çözüm: $\frac{36}{24} = \frac{2.18}{2.12} = \frac{18}{12} = \frac{2.9}{2.6} = \frac{3.3}{3.2} = \frac{3}{2}$

**Not 2.1.12** $\frac{a}{b}$ *kesrinin en sade biçimi* $obeb(a,b) = 1$ *olduğu durumdur.*

***Kesir çeşitleri***

**Tanım 2.1.13** $\frac{a}{b}$ *bir kesir olsun. İşaretine bakılmaksızın*

**i)** $a < b$ *ise kesre* ***basit kesir****,*

**ii)** $a \geq b$ *ise kesre* ***bileşik kesir****,*

**iii)** $c \neq 0$ *ve* $\frac{a}{b}$ *bir basit kesir olmak üzere*

$$c\frac{a}{b}$$

*kesrine* ***tam sayılı kesir*** *denir.*

**Örnek 2.1.14 1.** $\frac{5}{8}, \frac{-1}{5}, \frac{7}{15}, \frac{-4}{-5}$ *kesirleri basit kesirlerdir.*

**2.** $\frac{8}{5}, \frac{-5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{-9}{-5}$ *kesirleri bileşik kesirlerdir.*

**3.** $2\frac{1}{2}, -3\frac{4}{7}$ *tam sayılı kesirlerdir.*

### 2.1.2 Rasyonel sayılarda işlemler

***A. Toplama işlemi:*** Rasyonel sayılarda toplama işlemi, paydaları eşit olan rasyonel sayılar için tanımlıdır. Paydaları eşit olan rasyonel sayılarda toplama yapılırken paylar toplanır paya ve ortak payda paydaya yazılır. Yani,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

dir. Paydalar eşit değilse genişletme işlemi ile paydalar eşitlenir ve yukarıdaki gibi toplanır. Yani,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} + \frac{c.b}{b.d} = \frac{a.c + c.d}{b.d}$$

dir.

Daha fazla rasyonel sayı toplanmak istenirse paydaları eşitlenerek yukarıdakilere benzer şekilde toplanırlar.

**Not 2.1.15** *Paydaları eşit olmayan rasyonel sayıların paydalarının eşitlenebileceği en küçük sayı, paydadaki sayıların okek i dir.*

**Örnek 2.1.16** $\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=?$

*Çözüm:* $\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5+4}{3}=\frac{9}{3}=3$

**Örnek 2.1.17** $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=?$

*Çözüm:* $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$

**Örnek 2.1.18** $2+\frac{1}{2}=?$

*Çözüm:* $2+\frac{1}{2}=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

**Örnek 2.1.19** $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=?$

*Çözüm:* $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}$

***B. Çıkarma işlemi:*** Çıkarma işlemi, toplama işleminin özel bir hali olduğundan çıkarmada toplama gibi tanımlıdır. Paydaları aynı olan rasyonel sayılar çıkarılırken paylar farkı paya ve ortak payda paydaya yazılarak çıkarma işlemi yapılır. Yani,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

dir.

Paydalar eşit değilse paydalar eşitlenir ve çıkarma işlemi yapılır. Yani,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.d}-\frac{c.b}{b.d}=\frac{a.c-c.d}{b.d}$$

dir.

**Örnek 2.1.20** $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=?$

*Çözüm:* $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$

**Örnek 2.1.21** $\frac{2}{3}-\frac{6}{5}=?$

*Çözüm:* $\frac{2}{3}-\frac{6}{5}=\frac{10}{15}-\frac{18}{15}=\frac{10-18}{15}=-\frac{8}{15}$

Bir işlem, toplama ve çıkarma içerebilir. Bu durumda, tüm rasyonel sayıların paydaları eşitlendikten sonra paylardaki toplama yada çıkarma işlemleri yapılır.

**Örnek 2.1.22** $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=?$

*Çözüm:* $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{20}-\frac{10}{20}+\frac{12}{20}=\frac{5-10+12}{20}=\frac{7}{20}$

**Not 2.1.23** **1.**

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{a.c}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a.c+b}{c}$$

*olduğundan*

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a.c+b}{c}$$

*dir.*

**2.**

$$a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{a.c}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a.c-b}{c}$$

*olduğundan*

$$a-\frac{b}{c}=\frac{a.c-b}{c}$$

*dir.*

**3.** $a\frac{b}{c}$ *tam sayılı kesri yukarıdaki işlemle bir bileşik kesre çevrilebilir. Yani,*

$$a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$$

*dir.*

**Örnek 2.1.24** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $3+\frac{2}{5}=\frac{3.5+2}{5}=\frac{17}{5}.$

**2.** $3-\frac{2}{5}=\frac{3.5-2}{5}=\frac{13}{5}$

**3.** $-1+\frac{2}{3}=\frac{(-1.3+2)}{2}=\frac{-3+2}{3}=-\frac{1}{3}$

***C. Çarpma işlemi:*** Rasyonel sayılarda çarpma işlemi yapılırken paylar çarpımı paya, paydalar çarpımı paydaya yazılır. Yani,

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

dir. Ayrıca,

$$a.\frac{b}{c} = \frac{a.b}{c}$$

olduğu açıktır. Daha fazla rasyonel sayıda benzer şekilde çarpılabilir.

**Örnek 2.1.25** $\frac{4}{5}.\frac{3}{2} = \frac{4.3}{5.2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

**Örnek 2.1.26** $4.\frac{5}{2} = \frac{4.5}{2} = 10.$

Çarpma işlemi yapılırken pay ve paydalarda sadeleştirme işlemi varsa öncelikle bu sadeleştirmelerin yapılması zaman kazandıracaktır.

**Örnek 2.1.27** $\frac{\cancel{4}^2}{5}.\frac{3}{\cancel{2}^1} = \frac{6}{5}$

**Örnek 2.1.28** $\frac{8}{15}.\frac{7}{4}.\frac{3}{2} = \frac{8.7.3}{15.4.2} = \frac{7}{5}.$

**Örnek 2.1.29** 200 *ün* $\frac{4}{5}$ *ni bulunuz.*

*Çözüm:* $200.\frac{4}{5} = 40.4 = 160$

**Örnek 2.1.30** *Ali,* 1200 *lirasının* $\frac{1}{6}$ *sını harcıyor. Geriye ne kadar parası kalır?*

*Çözüm: Harcadığı para miktarı* 1200 *liranın* $\frac{1}{6}$ *sı* $1200.\frac{1}{6} = 200$ *dür. Geriye kalan para miktarı*

$1200 - 200 = 1000$ *liradır.*

***D. Bölme işlemi:*** İki rasyonel sayıyı bölmek için birinci kesir aynen kalarak ikinci kesir ters çevrilerek çarpılır. Yani,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$

veya

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$

dir.

**Örnek 2.1.31** $\frac{4}{5} : \frac{8}{7} = ?$

*Çözüm:* $\frac{4}{5} : \frac{8}{7} = \frac{4}{5}.\frac{7}{8} = \frac{7}{10}$

**Örnek 2.1.32** $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{15}{4}} = ?$

*Çözüm:* $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{15}{4}} = \dfrac{5}{8}.\dfrac{4}{15} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$

Dört işlemi içeren işlemlerde oluşturulabilir. Bu durumda bir işlem önceliği oluşacaktır. Eğer varsa üslü ifadeler ilk olarak yapılır, daha sonra varsa parantez içleri yapılır, daha sonra bölme, daha sonra çarpma ve en son toplama yada çıkarma işlemleri yapılır.

**Örnek 2.1.33** $(2 + \dfrac{3}{4}).\dfrac{8}{5} = ?$

*Çözüm: Öncelikle parantez içi yapılıp sonra çarpma işlemi yapılmalıdır. Buna göre*

$$(2 + \frac{3}{4}).\frac{8}{5} = (\frac{2.4+3}{4}).\frac{8}{5} = \frac{11}{4}.\frac{8}{5} = \frac{22}{5}$$

**Örnek 2.1.34** $(2 + \dfrac{1}{2}) : (2 - \dfrac{1}{2}) = ?$

*Çözüm: Öncelikle parantez içleri yapılıp sonra bölme işlemi yapılmalıdır. Buna göre*

$$(2 + \frac{1}{2}) : (2 - \frac{1}{2}) = (\frac{2.2+1}{2}) : (\frac{2.2-1}{2}) = \frac{5}{2} : \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

**Örnek 2.1.35** $\dfrac{1 + \frac{3}{5}}{2 - \frac{1}{10}} = ?$

*Çözüm: Bu gibi işlemlerde ana kesir çizgisinin altında ve üstünde birer rasyonel sayı olmalı ki bölme yapılsın. Bu ise ana kesir çizgisinin altında ve/veya üstünde işlemler varsa öncelikle bu işlemlerin yapılması gerektiğini söyler:*

$$\frac{1 + \frac{3}{5}}{2 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{5.1+3}{5}}{\frac{2.10-1}{10}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{19}{10}} = \frac{8}{5}.\frac{10}{19} = \frac{16}{19}$$

**Örnek 2.1.36** $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{7}} : \dfrac{1}{7} =?$

*Çözüm: Öncelikle* $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{7}}$ *işlemi yapılmalı:*

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{7}} = \frac{4}{5}.\frac{7}{8} = \frac{7}{10} \text{ ve}$$

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{7}} : \frac{1}{7} = \frac{7}{10} : \frac{1}{7} = \frac{7}{10}.\frac{7}{1} = \frac{49}{10}$$

## 2.2 Faktöriyel hesabı

**Tanım 2.2.1** *$n$ bir doğal sayı olmak üzere $n$ den 1 e kadar olan doğal sayıların çarpımına $n$ faktöriyel denir ve $n!$ ile yazılır. Buna göre*

$$n! = n.(n-1).\ldots.3.2.1$$

**Örnek 2.2.2** *1.* $1! = 1$

*2.* $2! = 2.1 = 2$

*3.* $3! = 3.2.1 = 6$

*4.* $4! = 4.3.2.1 = 24$

**Not 2.2.3** $0! = 1$ *dir.*

**Örnek 2.2.4** $6! = 6.\underbrace{5.4.3.2.1}_{5!} = 6.5! = 6.5.\underbrace{4.3.2.1}_{4!} = 6.5.4!$ *yazılabilir.*

**Örnek 2.2.5** $10! = 10.9! = 10.9.8! = 10.9.8.7.6!$ *yazılabilir.*

**Örnek 2.2.6** $\dfrac{7!}{5!} =?$

*Çözüm:* $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7.6.\cancel{5}!}{\cancel{5}!} = 42$

**Örnek 2.2.7** $\dfrac{10!}{9!}$ =?

*Çözüm:* $\dfrac{10!}{9!} = \dfrac{10.\cancel{9}!}{\cancel{9}!} = 10$

**Örnek 2.2.8** $\dfrac{10!+9!}{9!}$ *işleminin sonucunu bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{10!+9!}{9!} = \dfrac{10.9!+9!}{9!} = \dfrac{\cancel{9}!(10+1)}{\cancel{9}!} = 11$

**Örnek 2.2.9** $\dfrac{8!-6!}{6!}$ *işleminin sonucunu bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{8!-6!}{6!} = \dfrac{8.7.6!-6!}{6!} = \dfrac{6!(56-1)}{6!} = 55$

**Örnek 2.2.10** $\dfrac{9!+8!+7!}{8!+7!}$ *işleminin sonucunu bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{9!+8!+7!}{8!+7!} = \dfrac{9.8.7!+8.7!+7!}{8.7!+7!} = \dfrac{7!(72+8+1)}{7!(8+1)} = \dfrac{7!.81}{7!.9} = 9$

**Problemler**

1. $\dfrac{120}{150}$ kesrini en sade şekilde yazınız.
2. $x$, $y$ ve $z$ pozitif tam sayılar olsun. $\dfrac{6}{x} = \dfrac{y}{3} = z$ ise $z$ nin en büyük değeri için $x+y+z$ toplamını bulunuz?
3. 200 ün $\dfrac{3}{4}$ nün $\dfrac{2}{3}$ nü bulunuz?
4. $\dfrac{2}{3}$ ün $\frac{6}{5}$ i kaçtır?
5. $\dfrac{5}{8}$ in kaç katı $\dfrac{3}{4}$ dür?
6. $x$ ve $y$ pozitif tam sayılar olmak üzere $x = 4 - \dfrac{5}{y+1}$ ise $x$ kaçtır?
7. 1200 ün yarısının çeyreğini bulunuz?
8. $\dfrac{18}{x}$ sayısını pozitif tam sayı yapan kaç tane $x$ tam sayısı vardır?
9. $\dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{5}$ =?
10. $\dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3}$ =?

11. $\frac{4}{3}-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=?$

12. $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{1}{6}.\frac{2}{3}=?$

13. $3-\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=?$

14. $-2-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=?$

15. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}:\frac{3}{5}+3.\frac{5}{9}=?$

16. $(6-\frac{2}{3}).\frac{9}{8}=?$

17. $(6+\frac{2}{3}):(1-\frac{2}{3})=?$

18. $\dfrac{(-2)^2+(-2)^3-2^2}{\frac{1}{4}}=?$

19. $\dfrac{2+\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=?$

20. $\dfrac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{2}{3}}=?$

21. $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{7}}:7=?$

22. $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{10}{7}}+\frac{5}{4}=?$

23. $\dfrac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{2}{3}}:\frac{3}{2}=?$

24. $\dfrac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{2}{3}}:(2+\frac{3}{2})=?$

25. $\dfrac{2+\dfrac{2}{3}}{3-\dfrac{2}{3}}:\dfrac{3+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}=?$

26. $\dfrac{1+\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}}{4}=?$

27. $\dfrac{1+\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}-4}=?$

28. $\dfrac{1+\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}-4}+\dfrac{2}{5}=?$

29. $\dfrac{1+\dfrac{2}{4-\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}-4}+\dfrac{2}{5+\dfrac{2}{3}}=?$

30. $\dfrac{9!-10!-11!}{8!+10!}=?$

31. $\dfrac{10!}{8!}+\dfrac{8!-7!}{7!}=?$

32. $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}=?$

33. $\dfrac{(7!-8!).9}{(9!-10!).8}=?$

## 2.3 Ondalıklı sayılar (Virgüllü sayılar)

**Tanım 2.3.1** *Paydası* 10 *nun herhangi bir kuvveti* $(10, 100, 1000, ...)$ *olan rasyonel sayılara ondalıklı sayılar denir.*

**Örnek 2.3.2** $\dfrac{2}{10}, -\dfrac{15}{100}, \dfrac{125}{1000}$ *birer ondalıklı sayıdırlar.*

**Örnek 2.3.3** $\dfrac{1}{2}$ *sayısı ondalık bir sayı gibi görünmüyor olabilir. Fakat, bu rasyonel sayı* 5 *ile genişletilirse*

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

*şeklinde ondalık bir sayı hali alır.* $\frac{1}{2}$ *sayısı ondalık bir sayıdır.*

**Örnek 2.3.4** *Benzer şekilde* $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}, \frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \frac{1}{8} = \frac{125}{1000}$ *dir.*

**Örnek 2.3.5** $\frac{1}{3}$ *rasyonel sayısı ondalıklı değildir. Bu tip rasyonel sayılara devirli ondalıklı sayılar denir.*

### 2.3.1 Ondalıklı sayıların virgül ile yazımı

Öncelikle virgüllü sayıların yapısına bakalım. $a, b, c, d, e$ birer rakam olmak üzere, bu rakamlarla $ab, cde$ virgüllü sayısı yazılsın. Virgülün solundaki kısma virgüllü sayının tam kısmı, virgülün sağındaki kısma ise ondalıklı kısım denir.

$72, 329$ sayısının tam kısmı 72 ve ondalıklı kısmı 329 dur. Doğal sayılarda olduğu gibi ondalıklı kısıma dikkat etmek koşulu ile virgüllü sayılarda çözümlenebilir. Çözümleme yapabilmek için öncelikle basamakları belirlemek gerekmektedir. Virgüllü sayının tam kısmı doğal sayılardaki basamaklarla aynı olduğu açıktır. Ondalıklı kısım ise virgüle en yakından başlamak üzere $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ vs. şeklindedir.

**Örnek 2.3.6** $72, 329$ *virgüllü sayısını alalım.*

*Bu virgüllü sayıda*

7 *in bulunduğu basamak onlar* $10^1$ *basamağı*

2 *in bulunduğu basamak birler* $10^0$ *basamağı*

3 *nin bulunduğu basamak* $\frac{1}{10}$ *lar basamağı*

2 *in bulunduğu basamak* $\frac{1}{100}$ *ler basamağı*

9 *un bulunduğu basamak* $\frac{1}{1000}$ *ler basamağı*

*dır. Böylece bu virgüllü sayı*

$$72, 329 = 7.10 + 2.1 + 3.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{100} + 9.\frac{1}{1000}$$

*şeklinde çözümlenir. Bu eşitlikte rasyonel kısımda paydaları eşitleyip toplamayı yaparsak:*

$$72,329 = 7.10 + 2.1 + 3.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{100} + 9.\frac{1}{1000} = 72 + \frac{329}{1000}$$

*ve böylece*

$$72,329 = 72 + \frac{329}{1000}$$

*olduğu açıktır. Ayrıca bu virgüllü sayı*

$$72,329 = \frac{72329}{1000}$$

*şeklinde rasyonel sayı olarak yazılabilir.*

**Örnek 2.3.7** *Yukarıdaki örneğe farklı virgüllü sayılara uygulayalım:*

**a)** $2,6 = 2 + 6.\frac{1}{10} = 2 + \frac{6}{10}$

**b)** $8,15 = 8 + 1.\frac{1}{10} + 5.\frac{1}{100} = 8 + \frac{15}{100}$

**c)** $14,1 = 14 + 1.\frac{1}{10} = 14 + \frac{1}{10}$

**d)** $145,86 = 145 + \frac{86}{100}$

**e)** $0,6 = 0 + \frac{6}{10} = \frac{6}{10}$

Virgüllü sayılar okunurken önce tam kısım sonra rasyonel kısım okunur. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

$2,6 = 2 + \frac{6}{10}$ sayısı "2 tam onda 6"

$8,15 = 8 + \frac{15}{100}$ sayısı "8 tam yüzde 15"

$145,86 = 145 + \frac{86}{100}$ sayısı "145 tam yüzde 86"

$0,6 = 0 + \frac{6}{10}$ sayısı "0 tam onda 6"

$2,658 = 2 + \frac{658}{1000}$ sayısı "2 tam binde 658"

**Örnek 2.3.8** *Yukarıdaki örnekteki virgüllü sayıları tam ile ondalıklı sayıları toplayarak rasyonel sayıya çevirebiliriz:*

**a)** $2,6 = \dfrac{26}{10}$

**b)** $8,15 = \dfrac{815}{100}$

**c)** $14,1 = \dfrac{141}{10}$

**d)** $145,86 = \dfrac{14586}{100}$

**e)** $0,6 = \dfrac{6}{10}$

Yukarıdaki örneklerden anlaşılacağı üzere, virgüllü sayıyı hiç virgül yokmuş gibi paya yazıp, paydaya ise virgüllü sayıda virgülden sonra kaç tane rakam varsa o kadar 10 nun kuvvetini yazarak verilen virgüllü sayıyı rasyonel sayıya çeviririz.

**Not 2.3.9** *Aşağıda bilinen özellikleri inceleyelim.*

**1.** *Bir sayının soluna yazılan sıfırların kıymeti yoktur. Yani sayının değerini değiştirmez. Örneğin* $4 = 04 = 004$ *dür.*

**2.** *Bir tam sayının virgülden sonraki kısmı sıfırdır. Örneğin* $4 = 4,0 = 4,00$ *dır.*

**3.** *Virgüllü bir sayıda, virgülden sonraki sıfırdan farklı sayıların sağına yazılan sıfırların kıymeti yoktur.*

**Örnek 2.3.10** $4,8 = 4,80 = 4,800 = 4.8000$ *yazılabilir. Çünkü*

$$4,8 = \frac{48}{10} = \frac{480}{100} = 0,480$$

*olduğu açıktır. Tekrar genişletme yapılarak*

$$4,8 = \frac{48}{10} = \frac{4800}{1000} = 0,4800$$

*yazılabilir.*

**Örnek 2.3.11** **1.** $\dfrac{6}{10} = 0,6$

**2.** $\dfrac{12}{10} = 1,2$

**3.** $\dfrac{125}{10} = 12,5$

**4.** $\dfrac{6}{100} = 0,06$

**5.** $\dfrac{12}{100} = 0,12$

**6.** $\dfrac{125}{100} = 1,25$

**7.** $\dfrac{6}{1000} = 0,006$

**8.** $\dfrac{12}{1000} = 0,012$

**9.** $\dfrac{125}{1000} = 0,125$

**10.** $\dfrac{11}{20} = \dfrac{55}{100} = 0,55$

Rasyonel yazımdan ondalıklı yazıma geçilebilindiği gibi ondalıklı yazımdan da rasyonel gösterime geçilebilir. Ondalıklı yazımda hiç virgül yokmuş gibi paya sayı yazılır paydaya ise ondalıklı yazımda virgülden sonra kaç tane rakam varsa o kadar 10 nun kuvveti yazılır.

**Örnek 2.3.12** **1.** $0,9 = \dfrac{09}{10} = \dfrac{9}{10}$

**2.** $1,1 = \dfrac{11}{10}$

**3.** $12,1 = \dfrac{121}{10}$

**4.** $0,06 = \dfrac{6}{100}$

**5.** $1,25 = \dfrac{125}{100}$

**6.** $0,125 = \dfrac{125}{1000}$

**7.** $0,0125 = \dfrac{125}{10000}$

**7.** $12,345 = \dfrac{12345}{1000}$

### 2.3.2 Ondalıklı sayılarda işlemler

Ondalık sayılar nihayetinde birer rasyonel sayı olduğu için ondalıklı sayılar rasyonel hale çevrilerek işlemler yapılabilir.

**Örnek 2.3.13** **1.** $0,2+0,01=\frac{2}{10}+\frac{1}{100}=\frac{20+1}{100}=\frac{21}{100}=0,21$

**2.** $0,1.0,2=\frac{1}{10}.\frac{2}{10}=\frac{2}{100}=0.02$

**3.** $0,1:0,02=\frac{1}{10}:\frac{2}{100}=\frac{1}{10}.\frac{100}{2}=\frac{10}{2}=5$

Verilen örneklerden yola çıkarak daha pratik yöntemler aşağıdaki gibi verilebilir.

***A. Toplama-çıkarma işlemi:*** Ondalıklı sayıyı rasyonel sayıya çevirerek yapılan işlem kısaca şöyle yapılabilir. Virgüllü sayılarda toplama yapılırken öncelikle sayıların virgülden sonraki rakam sayıları eşitlenir, daha sonra virgüller alt alta gelecek biçimde yazılır ve hiç virgül yokmuş gibi toplanır. Son olarak, virgülden sonraki eşit rakam sayısı kadar sonuca virgül konur. Benzer işlem çıkarma içinde aynıdır.

**Örnek 2.3.14** $12,3+0,12-2,4=?$

*Çözüm:* $12,30+0,12-2,40=12,42-2,40=10,02$

***B. Çarpma işlemi:*** Ondalıklı sayıyı rasyonel sayıya çevirerek yapılan işlem kısaca şöyle yapılabilir. Virgül yokmuş gibi çarpma yapılır. Çarpımı yapılan ondalıklı sayıların virgülden sonraki rakam sayısı toplamı kadar sonuca virgül konur.

**Örnek 2.3.15** $0,2.1,2=0,24$

***C. Bölme işlemi:*** Bölme işlemi yapılırken, öncelikle virgülden sonraki rakam sayısı eşitse hiçvirgül yokmuş gibi sayılar bölünür. Çünkü sayılar rasyonel sayıya çevrilip bölme yapılırsa paydalarındaki 10'nun kuvvetleri sadeleşecektir.

**Örnek 2.3.16** $\frac{0,22}{0,11}=\frac{\frac{22}{100}}{\frac{11}{100}}=\frac{22}{100}.\frac{100}{11}=\frac{22}{11}=2$

Şayet virgülden sonraki rakam sayıları eşit değilse sayıların sağına sıfır yazılarak, virgülden sonraki rakam sayıları eşitlenir ve virgül ortadan kaldırılır.

**Örnek 2.3.17** $\frac{0,9}{0,03} = \frac{0,90}{0,03} = \frac{90}{3} = 30$

**Örnek 2.3.18** $\frac{16}{0,4} = \frac{16,0}{0,4} = \frac{160}{4} = 40$

**Örnek 2.3.19** $\frac{2}{0,4} - \frac{0,03}{0,01} + \frac{2,22}{0,222} = ?$

*Çözüm:* $\frac{2}{0,4} - \frac{0,03}{0,01} + \frac{2,22}{0,222} = \frac{2,0}{0,4} - \frac{3}{1} + \frac{2,220}{0,222} = \frac{20}{4} - \frac{3}{1} + \frac{2220}{222} = 5 - 3 + 10 = 12$

**Problemler**

1. $\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{1}{25}$ rasyonel sayılarını virgüllü yazınız?
2. $0,2 - 0,22 + 1,1 = ?$
3. $0,2.(1,25 - 1,1) = ?$
4. $0,2.0,3 - 0,1.(1 - 0,8) = ?$
5. $\frac{1 - 0,6}{1 + 0,6} = ?$
6. $\frac{2,2}{0,22} - \frac{22}{2,2} = ?$
7. $\frac{0,4}{0,04} + \frac{0,03}{0,01} - \frac{1,8}{0,09} = ?$
8. $\frac{0,5(1 - 0.98)}{0,001} = ?$

## 2.4 Rasyonel sayılarda sıralama

Bir rasyonel sayıyı kesir olarak düşünürsek payda bütünün kaç eş parçaya bölündüğünü, pay ise bu eşparçalardan kaç tanesinin gösterilmek istendiğini ifade ettiğini biliyoruz. Bu ifade ile rasyonel çoklukları sıralayabiliriz. Pozitif rasyonel sayılar sıralanırken (hangisi büyük hangisi küçük) paydaları eşit olan rasyonel sayılardan payı büyük olan daha büyüktür. Payları eşit olan rasyonel sayılarda ise paydası küçük olan daha büyüktür.

**Örnek 2.4.1** $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}$ *sayılarını sıralarsak*

$$\frac{1}{2} < \frac{5}{2} < \frac{11}{2}$$

*dır.*

**Örnek 2.4.2** $\frac{11}{5}, \frac{11}{3}, \frac{11}{9}$ *sayılarını sıralarsak*

$$\frac{11}{9} < \frac{11}{5} < \frac{11}{3}$$

*dır.*

Sıralanacak olan rasyonel sayıların pay yada paydaları eşit değilse rasyonel sayılar uygun sayılarla genişletilerek pay yada paydaları eşitlenebilir

**Örnek 2.4.3** $\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, \frac{3}{4}$ *sayılarını sıralayınız.*

*Çözüm:* $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}, \frac{5}{2} = \frac{30}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ *olduğundan* $\frac{4}{12} < \frac{9}{12} < \frac{30}{12}$ *dir. Buradan* $\frac{1}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{2}$ *dir.*

Negatif rasyonel sayılar sıralanırken pozitifmiş gibi sıralama yapılır ve son olarak eşitsizliğin yönü değiştirilir.

**Örnek 2.4.4** $-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}$ *sayılarını sıralayınız.*

*Çözüm: Rasyonel sayılar pozitif gibi sıralayalım* $\frac{1}{5} < \frac{4}{5} < \frac{8}{5}$*. Sayılar negatif olduğundan tekrar düzenlersek*

$$-\frac{8}{5} < -\frac{4}{5} < -\frac{1}{5}$$

*dır.*

Rasyonel sayılar sıralanırken ondalıklı sayıya çevrilip de sıralanabilir.

**Örnek 2.4.5** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{9}{10}$ *sayılarını sıralayalım.*

*Çözüm:* $\frac{1}{2} = 0,5, \ \frac{1}{4} = 0,25$ *ve* $\frac{9}{10} = 0,9$ *olduğundan*

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{9}{10}$$

*dur.*

**Not 2.4.6** *Pay ve paydası arasındaki farkları eşit olan rasyonel sayılar sıralanırken sayılar büyüdükçe, basit kesirlerin değeri büyür, bileşik kesirlerin değeri azalır.*

**Örnek 2.4.7** $\frac{2}{3}, \frac{20}{21}, \frac{40}{41}$ *sayılarının pay ve paydaları arasındaki fark eşit ve bu kesirler basit kesir olduğundan sıralama*

$$\frac{2}{3} < \frac{20}{21} < \frac{41}{40}$$

*şeklindedir.*

**Not 2.4.8** *İki rasyonel sayının arasına rasyonel sayılar yazılabilir. $a < b$ ise*

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

*dir. Burada, $\frac{a+b}{2}$ sayısı hem $a$ ya hemde $b$ ye eşit uzaklıktadır. Diğer bir ifade ile $\frac{a+b}{2}$ sayısı $a$ ve $b$ nin orta noktasındadır.*

**Örnek 2.4.9** $\frac{1}{3} < \frac{x}{2} < \frac{5}{3}$ *ise $x$ in alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.*

*Çözüm: Paydalar eşitlenirse*
$\frac{2}{6} < \frac{3x}{6} < \frac{10}{6}$ *eşitsizliğinden*
$2 < 3x < 10$ *elde edilir. Buradan $x = 1, 2, 3$ olabileceği açıktır.*

### Bölüm Problemleri

1. $\frac{12}{x}$ rasyonel sayısını tam sayı yapan $x$ pozitif sayılarını bulunuz?
2. $\frac{12}{x}$ rasyonel sayısını tam sayı yapan $x$ tam sayılarını bulunuz?
3. $\frac{12}{x}$ rasyonel sayısını tam sayı yapan $x$ tam sayılarının toplamını bulunuz?
4. $\frac{3a+21}{a}$ rasyonel sayısını tam sayı yapan $a$ pozitif sayılarını bulunuz?
5. $\frac{15a-14}{a}$ rasyonel sayısının en büyük tam sayı değeri için y$a$ tam sayısının değerini bulunuz?
6. $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ sayılarını sıralayınız?

7. $\frac{8}{7} < \frac{x+1}{2}$ ise en küçük $x$ tam sayısını bulunuz?

8. $\frac{1}{4}(2-(-1)) - \frac{3}{2}(-5-(1)) =?$

9. $\frac{(8-(-2))(-4-1)}{15} =?$

10. $\frac{20.21.22}{33.15} =?$

11. $3.\frac{4}{5} - 2.\frac{3}{4} =?$

12. $\frac{-3-(-8):4}{3} =?$

13. $2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} =?$

14. $(1-\frac{2}{3})(2+\frac{4}{3}) =?$

15. $(1-\frac{2}{3}) : (2+\frac{4}{3}) =?$

16. $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})...(1+\frac{1}{20}) =?$

17. $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{5} + ... + \frac{20}{4} + \frac{21}{6} =?$

18. $\frac{(\frac{1}{a} : \frac{1}{b}) : c}{(\frac{1}{a}) : (\frac{1}{b} : c)} =?$

19. $A = \frac{8}{9} + \frac{5}{7}$ ise $\frac{14}{9} + \frac{12}{9}$ sayısını $A$ türünden hesaplayınız?

20. $\frac{45!}{3^m.5^n.2^p}$ ifadesinin bir tam sayı olabilmesi için $m+n+p$ en fazla kaç olabilir?

21. $55! = 15^n.A$ ise $n$ en fazla kaç olabilir?

22. Bir firma ürettiği 2500 adet gömleğim önce $\frac{2}{5}$ ni satıyor. Daha sonra kalanların $\frac{3}{5}$ ni sattığına göre satılması gereken kaç gömlek kalmıştır?

23. $x, y, z$ pozitif tam sayılar olmak üzere $1,2 = x + \frac{y}{z}$ ise $x+y+z$ en az kaçtır?

24. $\frac{2}{3}, \frac{5}{16}$ rasyonel sayılarının böldüğü en küçük doğal sayıyı bulunuz?

25. $8.(1-0.75) - 4.(0.75-1) =?$

26. $\dfrac{0.2-0.22}{0.01}$ =?

27. $\dfrac{0,016}{0.002}-\dfrac{0.16}{0.2}$ =?

28. $\dfrac{5,55}{0,555}-\dfrac{1,1}{0,11}$ =?

29. $\dfrac{4}{0,02}-\dfrac{8}{0,8}$ =?

30. $\dfrac{(0,16)^2}{(0,004)^3}$ =?

31. $\dfrac{a,aa}{aa,a}-\dfrac{0,0b}{0,00b}$ =?

32. $\dfrac{x^x+x^x+x^x+x^x}{x^x+x^x+x^x}$ =?

33. (DGS2013) $\dfrac{1}{4}+[\dfrac{1}{2}:(\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{3})]$ =?

34. (DGS2013) $\dfrac{9}{2}(2-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9})$ =?

35. (DGS2013) $\dfrac{11!-10!-9!}{9!+8!+7!}$ =?

36. (DGS2013) $\dfrac{7}{3}<\dfrac{n-1}{6}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük $n$ dogal sayısı kaçtır?

37. (DGS2013) $a<\dfrac{2}{3}<b<\dfrac{13}{6}$ sıralamasında birbirini izleyen sayılararasındaki fark eşit ise $b-a$ =?

38. (DGS2013) $a$ ve $b$ pozitif tam sayılar o.ü. $27!=5^a.b$ olsun. Buna göre $a$ nın alabileceği en büyük değeri bulunuz?

39. (DGS2012) $(\dfrac{14}{15}-\dfrac{7}{16})+(\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{16})$ =?

40. (DGS2012) $2-\dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{5}{2}}$ =?

41. (DGS2012) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{\dfrac{3}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}$ =?

42. (DGS2011) $\dfrac{6!-2.4!}{7!}$ =?

43. (DGS2011) $a = \dfrac{3b-2}{b}$ eşitliğinde $a$ ve $b$ birer tam sayı ise $a$ nın alabileceği en büyük değeri bulunuz?

44. (ALES2010) $\dfrac{4}{0.01} + \dfrac{0.4}{0.04} =?$

45. (ALES2011) $\dfrac{(0.0006)(0.08)}{0.048} =?$

46. (ALES2009) $\dfrac{0.02+0.005}{0.05} =?$

47. (DGS2013) $400040.1, 25 =?$

48. (DGS2012) $\dfrac{0,02}{2,4} : 0,25 =?$

# 3 ÜSLÜ SAYILAR

## 3.1 Üs(kuvvet) kavramı

**Tanım 3.1.1** *$n$ bir doğal sayı ve $a$ bir sayı olmak üzere $a$ üzeri $n$ (yada $a$ nın $n$. kuvveti)*

$$a^n = \underbrace{a.a....a}_{n\ tane}$$

*ile tanımlanır(n-tane a'nın çarpımı). $a \neq 0$ olmak üzere $a^0 = 1$ ile tanımlanır.*

**Örnek 3.1.2** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $2^3 = 2.2.2 = 8$

**2.** $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

**3.** $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

**4.** $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

**5.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

**6.** $10.10.10.10.10 = 10^5$

**7.** $(-1)^5 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1$

**Özellik 3.1.3** *Tanımdan doğan bazı özellikler aşağıdaki gibidir.*

**1.** $a^1 = a$ *dır.*

**2.** $0^0$ *bir sayı değildir.*

**3.** $1^n = 1$ *dir.*

**4.** $(a.b)^n = a^n.b^n$ *dir.*

**4.** $a^n.a^m = a^{m+n}$ *dir.*

**5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ *dir.*

***Örnek 3.1.4*** $5^1 - 8^0 - 1^{40} + 2^2 - (-2)^1 = 5 - 1 - 1 + 4 - (-2) = 9 - 2 + 2 = 9$

***Örnek 3.1.5*** $6^3 = (2.3)^3 = (2.3)(2.3)(2.3) = 2.2.2.3.3.3 = 2^3.3^3$

***Örnek 3.1.6*** $3^3.3^2 = (3.3.3).(3.3) = 3.3.3.3.3 = 3^5$

***Örnek 3.1.7*** $10^6$*'yı* $10^5$ *cinsinden* $10^6 = 10^1.10^5 = 10.10^5$ *ile yazılabilir.*

***Örnek 3.1.8*** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2.2}{3.3} = \frac{4}{9}$

***Not 3.1.9*** *Aşağıdaki ifadelere dikkat ediniz.*

**1.** $-2^2 = -2.2 = -4$ *ve* $(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$ *olduğundan* $-2^2 \neq (-2)^2$ *dir.*

**2.** $\underbrace{a + a + a ... + a}_{n\ tane} = n.a$ *dır*

***Örnek 3.1.10*** $\dfrac{(-2)^2 + 2^2}{-2^1 + (-2)^2} =?$

*Çözüm:* $\dfrac{(-2)^2 + 2^2}{-2^1 + (-2)^2} = \dfrac{4+4}{-2+4} = \dfrac{8}{2} = 4$

***Örnek 3.1.11*** $\dfrac{-3^2 - \Big(-2\Big)^3}{\Big(-1\Big)^1 - \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^2} =?$

*Çözüm:* $\dfrac{-3^2 - \Big(-2\Big)^3}{\Big(-1\Big)^1 - \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^2} = \dfrac{-9-(-8)}{-1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{-1}{-\dfrac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$

**6.** *$m$ ve $n$ birer doğal sayı olmak üzere*

$$\Big(a^m\Big)^n = a^{m.n}$$

*dir. Ayrıca, $a$ pozitif bir sayı olmak üzere* $\Big(a^m\Big)^n = a^{m.n} = a^{n.m} = \Big(a^n\Big)^m$ *eşitliği yazılabilir.*

***Örnek 3.1.12*** $(7^4)^3 = 7^{4.3} = 7^{12} = 7^{3.4} = (7^3)^4$ *dür.*

***Örnek 3.1.13*** *$5^x = a$ ise $125^x$ in $a$ türünden değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $125^x = (5^3)^x = (5^x)^3 = a^3$

***Not 3.1.14*** *$(-2^3)^2$ ile $(-2^2)^3$ sayılarının aynı olmadığına dikkat ediniz.*

**7.** *Pozitif sayıların bütün kuvvetleri pozitiftir.*

$$a > 0 \text{ ise } a^n > 0$$

**8.** *Negatif bir sayının çift kuvveti pozitiftir.*

$$a < 0 \text{ ve } n \text{ çift ise } a^n > 0$$

**9.** *Negatif bir sayının tek kuvveti negatiftir.*

$$a < 0 \text{ ve } n \text{ tek ise } a^n < 0$$

**Örnek 3.1.15** **1.** $(-3)^1 = -3 < 0$

**2.** $(-3)^2 = 9 > 0$

**3.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} > 0$

## 3.2 Negatif üs(kuvvet)

$n$ pozitif bir tam sayı ve $a$ bir sayı olsun.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ile tanımlanır.

**Örnek 3.2.1** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

**2.** $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

**3.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1} = 3$

**4.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

**5.** $(-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)^1} = -\frac{1}{2}$

**6.** $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

**7.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

**9.** $\frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

2 ve 4 numaralı örneklerdeki yazım genelleştirilirse aşağıdaki özellikler elde edilir. Örneklere benzer şekilde ispatlanabilir.

**Özellik 3.2.2** *1.* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}$ *dir.*

*2.* $\left(\frac{1}{b}\right)^{-n} = b^n$ *dir.*

**Örnek 3.2.3** $(\frac{2}{3})^{-1} - (\frac{2}{3})^{-2} =?$

*Çözüm:* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ *ve* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$ *olduğundan* $\frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{6}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$ *elde edilir.*

**Örnek 3.2.4** $2^{-1} - \frac{1}{2^{-2}} =?$

*Çözüm:* $2^{-1} - \frac{1}{2^{-2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$

**Örnek 3.2.5** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 3^{-1} =?$

*Çözüm:* $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$ *ve* $3^{-1} = \frac{1}{3}$ *olduğundan*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 3^{-1} = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9}$$

*elde edilir.*

**Örnek 3.2.6** $\dfrac{3^{-1}+3^{-2}}{9^{-1}}=?$

*Çözüm:* $\dfrac{3^{-1}+3^{-2}}{9^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{4}{9}.\dfrac{9}{1} = 4$ *elde edilir.*

**Örnek 3.2.7** $(2^{-1})^{-2}=?$

*Çözüm:* $(2^{-1})^{-2} = \left(\dfrac{1}{2^1}\right)^{-2} = (2^1)^2 = 2^2 = 4$

**Örnek 3.2.8** $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right)^2.\left(-2^{-2}\right)^{-1}=?$

*Çözüm:* $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ *ve* $(-2^{-2})^{-1} = (-\dfrac{1}{2^2})^{-1} = (-\dfrac{1}{4})^{-1} = -4$ *olduğundan*
$((\dfrac{2}{3})^{-1})^2.(-2^2)^{-1} = \dfrac{9}{4}.(-4) = -9$ *elde edilir.*

**Örnek 3.2.9** $\left(0,2\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{10}\right)^{-2} = \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 = \dfrac{100}{4} = 25$ *(Özellik* 3.2.2, 1*'den)*

**Örnek 3.2.10** $\left(0,04\right)^2.\left(0,8\right)^{-3}=?$

*Çözüm:*

$$\left(0,16\right)^2.\left(0,8\right)^{-3} = \left(\frac{16}{100}\right)^2.\left(\frac{8}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{16}{100}\right)^2.\left(\frac{10}{8}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{2^4}{10^2}\right)^2.\left(\frac{10}{2^3}\right)^3 = \frac{2^8}{10^4}.\frac{10^3}{2^9} = \frac{1}{10.2} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0,05$$

## 3.3 Ondalıklı sayıların üslü biçimde yazılması

Ondalıklı sayı kavramı ve neğatif üs kavramını bir arada düşüneceğiz. Aşağıdaki örnek yol gösterici olacaktır.

**Örnek 3.3.1** $0,8$ *sayısını üslü biçimde yazalım.*
*Çözüm:* $0,8 = \dfrac{8}{10} = 8.\underbrace{\dfrac{1}{10}}_{10^{-1}} = 8.10^{-1}$ *dir.*

**Örnek 3.3.2** $0,08$ *sayısını üslü biçimde yazalım.*
*Çözüm:* $0,08 = \dfrac{8}{100} = 8.\underbrace{\dfrac{1}{100}}_{10^{-2}} = 8.10^{-2}$ *dir.*

**Örnek 3.3.3** $1,25$ *sayısını üslü biçimde yazalım.*

*Çözüm:* $1,25 = \dfrac{125}{100} = 125.10^{-2}$ *dir.*

**Örnek 3.3.4** *Bir ondalıklı sayı,* 10 *ile genişletme işlemi yapılarak farklı şekillerde* 10 *nun kuvveti biçiminde yazılabilir. Örneğin;*

**1.** $2.10^{-2} = \dfrac{2}{10^2}.\dfrac{10}{10} = \dfrac{20}{10^3} = 20.10^{-3}$

**2.** $2.10^{-2} = \dfrac{2}{10^2} = \dfrac{2}{10}.\dfrac{1}{10} = 0,2.10^{-1}$

*verilebilir.*

**Örnek 3.3.5** $4.10^{-5}$ *sayısının yukarıdaki örneğe benzer şekilde düşünerek*

$$4.10^{-5} = 40.10^{-6} = 400.10^{-7} = 4000.10^{-8}$$

*şeklinde yazabiliriz.*

## Problemler

1. $\dfrac{-2^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = ?$

2. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}} = ?$

3. $\dfrac{-2^{-1} - (-2)^{-2}}{(\dfrac{3}{2})^{-2}} = ?$

4. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - 3.(-2)^{-1} = ?$

5. $(0,01)^{-1} - (0,1)^{-2} = ?$

6. $(0,1)^{-2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = ?$

7. $2^{-1} - 2^{-2} = ?$

8. $\dfrac{1}{3^{-1}} + \dfrac{2}{3^{-2}} = ?$

9. $(-3)^{-1} - (-3)^{-2} = ?$

10. $\dfrac{5^{-1}-4^{-1}}{2^{-1}-5^{-1}}=?$

11. $\dfrac{1+3^{-2}}{1-3^{2}}=?$

12. $\dfrac{(2^{-3})^{-2}.4^{-1}}{8^{-1}}=?$

13. $(0,2)^3.(0,4)^{-2}.(0,8)^{-1}=?$

14. $\dfrac{(-3)^{-1}.9^{-2}.\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{27}\right)^3}=?$

## 3.4 Üslü ifadelerde işlemler

***A. Toplama-çıkarma işlemi:*** Bilindiği üzere toplamanın temel kuralı aynı cinsler kendi aralarında toplanır. Üslü sayılara geçmeden önce bir örnek vermek gerekirse; 2 metre ile 3 kilometreyi, bu halleri ile toplayamayız. İkiside uzunluk ölçüsü olmasına rağmen cinsleri aynı değildir. Ya metre kilometreye çevrilmeli yada kilometre metreye çevrilmelidir. 3 kilometre 3000 metre olduğu için 2 metre ile 3 kilometrenin toplamı metre cinsinden 3002 metredir. Aynı cinsten olan üslü sayıların (taban ve üsleri aynı olan) katsayıları toplanır yada çıkarılır. Yani,

$$x.a^b+y.a^b-z.a^b=(x+y-z)a^b$$

dir.

**Örnek 3.4.1** $5.3^7+6.3^7-2.3^7=(5+6-2).3^7=9.3^7=3^2.3^7=3^9$

Taban ve kuvveti aynı olmayan üslü sayılar toplanıp çıkarılamazlar.

**Örnek 3.4.2** $8.5^9+6^7-5^9+2.6^2=?$

*Çözüm:* $8.5^9+6^7-5^9+2.6^7=8.5^9-1.5^9+1.6^7+2.6^7=7.5^9+3.6^7$

Bazı durumlarda, ilk bakışta farklı olan fakat temel üs özelliklerini kullanarak bir biri cinsine çevrilebilen durumlar vardır.

**Örnek 3.4.3** $5^6+5^8=5^6+5^2.5^6=5^6+25.5^6=(1+25).5^6=26.5^6$

Yukarıdaki örnekte tabanlar aynı olsada üsler farklı olduğu için toplama yapılamaz. Fakat $5^8$ sayısı, $5^6$ cinsinden yazılabildiği için, iki terimde aynı cinse çevrilebilir ve bu sayede toplama yapılabilir.

**Örnek 3.4.4** $3^3 - 3^4 + 3^5 = 3^3 - 3.3^3 + 9.3^3 = 7.3^3$

**Örnek 3.4.5** *$3^x = a$ ise $9^x + 9^x + 9^x$ in $a$ türünden değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $9^x + 9^x + 9^x = 3.9^x = 3.(3^2)^x = 3.(3^x)^2 = 3a^2$

***B. Çarpma işlemi:*** Tabanları aynı olan üslü ifadelerin çarpımını bulmak için taban aynı kalmak şartıyla üslerin toplamı üs olarak yazılır. Yani,

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

dir.

**Örnek 3.4.6** $5^8.5^4 = 5^{8+4} = 5^{12}$

**Örnek 3.4.7** $10^8.10^{-6} = 10^{8-6} = 10^2 = 100$

***C. Bölme işlemi:*** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m.\dfrac{1}{a^n} = a^m.a^{-n} = a^{m-n}$ ile bölme yapılabilir.

**Örnek 3.4.8** $\dfrac{10^8}{10^7} = 10^{8-7} = 10$

**Örnek 3.4.9** $\dfrac{5^4}{5^{-2}} = 5^{4-(-2)} = 5^6$

**Örnek 3.4.10** $\dfrac{10^5 + 10^4}{10^4} = ?$

*Çözüm:* $\dfrac{10^5 + 10^4}{10^4} = \dfrac{10.10^4 + 10^4}{10^4} = \dfrac{11.10^4}{10^4} = 11$

**Örnek 3.4.11** $\dfrac{(16)^5 + 8^6}{4^8} = ?$

*Çözüm:*

$$\frac{(16)^5 + 8^6}{4^8} = \frac{(2^4)^5 + (2^3)^6}{(2^2)^8} = \frac{2^{20} + 2^{18}}{2^{16}} = \frac{2^{18}(2^2 + 1)}{2^{16}} = \frac{2^{18}.5}{2^{16}} = 2^2.5 = 20$$

**Örnek 3.4.12** $\dfrac{9^4 + 9^4 + 9^4}{3^{10}} = ?$

*Çözüm:* $\dfrac{9^4 + 9^4 + 9^4}{3^{10}} = \dfrac{3.9^4}{3^{10}} = \dfrac{3.(3^2)^4}{3^{10}} = \dfrac{3.3^8}{3^{10}} = \dfrac{3^9}{3^{10}} = \dfrac{1}{3}$

**Örnek 3.4.13** $\dfrac{4.10^{-3}+2.10^{-4}}{6.10^{-5}}=?$

*Çözüm:* $4.10^{-3}=40.10^{-4}$ *olduğundan*

$$\frac{4.10^{-3}+2.10^{-4}}{6.10^{-5}}=\frac{40.10^{-4}+2.10^{-4}}{6.10^{-5}}=\frac{42.10^{-4}}{6.10^{-5}}=\frac{7}{10^{-1}}=70$$

*dir.*

Ayrıca çok sıfır içeren büyük sayılarda üslü sayılar yardımıyla basitçe yazılabilir. Örnek olarak

$$\begin{aligned}100000 &= 10^6\\ 125000 &= 125.10^3\\ 4200000 &= 42.10^5\end{aligned}$$

verilebilir.

### Bölüm Problemleri

1. $a\neq 0$ olmak üzere $\dfrac{(a^2)^{-3}.(-a^3)^4.(a^{-1})^{-2}}{(-a^4)^2}=?$
2. $\dfrac{6^{-4}.10^{-5}}{15^{-4}.2^{-10}}=?$
3. $\dfrac{18^5.10^5}{6^{10}.5^4}=?$
4. $(4^{-1})^5.(8^{-3})^{-1}=?$
5. $(\dfrac{1}{8})^{-4}.16^{-2}=?$
6. $\dfrac{2^{-8}-2^{-7}}{4^{-5}}=?$
7. $\dfrac{81^3+27^4}{9^5}=?$
8. $\dfrac{81^3+27^4}{9^5}=?$
9. $(2^{-4}.6)^4.(\dfrac{1}{9}.2^6)^3=?$
10. $(12^{-3}.3^2)^2.(6^{-2}.2^4)^2=?$

11. $\dfrac{1-(\frac{3}{2})^{-1}}{2-(\frac{2}{3})^{-1}}$ =?

12. $\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{-1}}{2-(\frac{1}{3})^{-2}}$ =?

13. $(2^x+3^x) : \dfrac{1}{2^{-x}+3^{-x}}$ =?

14. $2^{n+1}.\dfrac{1+2^{-n}}{1+2^n}$ =?

15. $\dfrac{10^8+10^9}{10^7+10^8}$ =?

16. $\dfrac{9^9-9^8}{3^7+3^8}$

17. $\dfrac{2.10^5+4.10^6}{12.10^5}$ =?

18. $2.10^{-3}-4.10^{-4}$ =?

19. $\dfrac{2.10^{-3}-2.10^{-2}}{10^{-3}}$ =?

20. $\dfrac{(-0,0002)^{-3}}{(0,008)^2}$ =?

21. $9^4$ ün $\dfrac{1}{81}$ i kaçtır?

22. $3^{-x}=a$ ise $9^{x-1}$ in $a$ türünden eşitini bulunuz?

23. $2^x=b$ ise $8^{-x+1}$ in $b$ türünden eşitini bulunuz?

24. $3^{-x}=a$ ise $\dfrac{9^{x+1}}{3^{-x+1}}$ in $a$ türünden eşitini bulunuz?

25. $3^{-x}=a$ ve $2^x=b$ ise $24^x$ in $a$ ve $b$ türünden değerini bulunuz?

26. $2^n=3$ ve $3^n=6$ ise $12^{3n-2}$ nin değerini bulunuz?

27. $\dfrac{(-a)^2.(-a^2)^{-3}}{a^{-4}}$ =?

28. $\dfrac{(x^m.y^n)^{-n}}{(x^n.y^m)^{-m}}$ =?

29. $\dfrac{a^{4-5x}.a^{3x-2}}{a^{-2x+1}}$ =?

30. $\dfrac{4.10^{-4} - 10^{-3}}{3.10^{-4}} =?$

31. $2^a = 5$ ise $\dfrac{8^a + 8^a + 8^a + 8^a}{2^a + 2^a + 2^a + 2^a + 2^a}$ ifadesinin değerini bulunuz?

32. $(-2)^{-1} - (-2)^{-2} =?$

33. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} =?$

34. $2^{-1} - 3^{-2} =?$

35. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} - 2^{-2} =?$

36. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} =?$

37. $\dfrac{3^{10} - 3^9 + 3^8}{3^9} =?$

38. $\dfrac{5^9 - 5^8 - 5^7}{5^8 + 5^7} =?$

39. $\dfrac{2^{-7} - 2^{-9}}{2^{-8}} =?$

40. $(0,3)^{-3}.(0.09)^2 =?$

41. (ALES2010) $\dfrac{2^{-1}}{2^{-2} + 4^{-1}} =?$

42. (ALES2012) $\dfrac{2^a + 2^a + 2^a + 2^a}{6^a} = \dfrac{4}{9}$ ise $a$ kaçtır?

43. (ALES2009) $2^x = 5$ ise $4^{x+1}$ in değerini bulunuz?

44. (DGS2013) $\dfrac{4^{-2} - 9^{-2}}{(6^{-2})^2} =?$

45. (DGS2013) $x$, $y$ birer tam sayı ve $3^{-x}.6^y = 24$ olduğuna göre $x + y$ kaçtır?

46. (DGS2013) $\dfrac{0,9 + 2,6}{2,7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}} =?$

47. (DGS2012) $a$ ve $b$ sıfırdan farklı sayılar ve $\dfrac{2}{a} = \dfrac{3}{b^{-1}}$ olduğuna göre $a.b$ kaçtır?

48. (DGS2012) $x, y, z$ sıfırdan farklı sayılar ve $x^2 = 81^y$, $x^3 = 27^z$ ise $\dfrac{y}{z}$ oranını bulunuz?

49. (DGS2012) $\dfrac{2.10^{-3} + 4.10^{-4}}{6.10^{-4}} = ?$

50. (DGS2011) $1 + (\dfrac{2}{3})^{-2} = ?$

# 4 MUTLAK DEĞER ve ÖZELLİKLERİ

## 4.1 Mutlak değer

**Tanım 4.1.1** *Bir sayının başlangıç noktasına (reel sayı ekseni üzerinde* 0 *a) olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir. Bir* $a$ *sayısının mutlak değeri* $|a|$ *ile gösterilir. Uzaklık pozitif bir sayı olduğundan, herhangi bir* $a$ *sayısı için* $|a| \geq 0$ *dır.* 0 *ın* 0 *a olan uzaklığı* 0 *olduğundan* $|0| = 0$ *dır.* $a > 0$ *olmak üzere,* $-a$ *ve* $a$ *sayılarının* 0 *a olan uzaklıkları* $a$ *birim kadar olduğundan*

$$|-a| = |a| = a$$

*dır. Sonuç olarak bir* $a$ *sayısının mutlak değeri*

$$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0; \\ 0, & a = 0; \\ a, & a > 0. \end{cases}$$

*ile verilebilir.*

**Örnek 4.1.2** *Aşağıda mutlak değerle ilgili bazı örnekler verilmiştir.*

**1.** $|-1| = -(-1) = 1$

**2.** $|-\frac{2}{5}| = -(-\frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$

**3.** $|6| = 6$

**4.** $|-6| = -(-6) = 6$

**Örnek 4.1.3** $|x-2|$ *sayısının en küçük değeri için* $x$ *kaçtır?*

*Çözüm:* $|x-2|$ *en küçük* 0 *olabildiğinden* $x = 2$ *dir.*

**Örnek 4.1.4** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $|2-5| = |-3| = -(-3) = 3$

**2.** $|5-2| = |3| = 3$

**3.** $|8-3| - |2-4| = |5| - |-2| = 5 - (-(-2)) = 5 - 2 = 3$

**4.** $\left|1-\frac{5}{2}\right| = \left|\frac{2-5}{2}\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

**5.** $\left|1-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{12}-\frac{4}{12}\right| = \frac{1}{2} + \left|\frac{-1}{12}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

**6.** $|(-3).(-5)| = |15| = 15$ *ve* $|-3|.|-5| = -(-3).-(-5) = 3.5 = 15$ *olduğundan*

$$|(-3).(-5)| = |-3|.|-5|$$

*yazılabilir.*

**7.** $\frac{|-4|}{|2|} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ *ve* $\left|\frac{-4}{2}\right| = |-2| = -(-2) = 2$ *olduğundan*

$$\frac{|-4|}{|2|} = \left|\frac{-4}{2}\right|$$

*dır.*

$a$ ve $b$ birer sayı olsun. $a < b$ ise $b$ nin $a$ ya olan uzaklığı $b-a$ olduğu açıktır. $a$ nın $b$ ye uzaklığı $-(a-b)$ dır $(a-b<0)$. $b$ nin $a$ ya uzaklığı ile $a$ nın $b$ ye uzaklığı aynıdır.

Sonuç olarak,

$$|b-a| = \begin{cases} -(b-a), & b-a<0; \\ 0, & b-a=0; \\ b-a, & b-a>0. \end{cases}$$

dır.

**Örnek 4.1.5** $a < 0 < b$ *ise* $|a-b| =?$, $|b-a| =?$

*Çözüm:*

**i)** $a < 0$ *dır.* $b > 0$ *ise* $-b < 0$ *olduğundan* $a-b < 0$ *dır. Buradan* $|a-b| = -(a-b) = b-a$ *dır.*

**ii)** $a < 0$ *olduğundan* $-a > 0$ *ve* $b > 0$ *olduğundan* $b-a > 0$ *dir. Buradan* $|b-a| = b-a$ *dır.*

**Örnek 4.1.6** $a < b$ *ise* $|a-b| - 2|b-a| =?$

*Çözüm:* $a < b$ *ise* $a-b < 0$ *olduğundan* $|a-b| = -(a-b) = b-a$ *ve* $b-a > 0$ *olduğundan* $|b-a| = b-a$ *dır. Böylece* $|a-b| - 2|b-a| = b-a-2(b-a) = b-a-2b+2a = a-b$ *elde edilir.*

**Örnek 4.1.7** *$a < 0$ ise* $\dfrac{4|a| - 2|-a|}{3|a|} = ?$

*Çözüm: $a < 0$ ise $-a > 0$ dır. Buradan $|a| = -a$ ve $|-a| = -a$ dır.*

$$\frac{4|a| - 2|-a|}{3|a|} = \frac{4(-a) - 2(-a)}{3(-a)} = \frac{-4a + 2a}{-3a} = \frac{-2a}{-3a} = \frac{2}{3}$$

## 4.2 Mutlak değerin özellikleri

Yukarıdaki örneklerden yola çıkarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**1.** $a$ bir sayı ise

$$|a| = |-a|$$

dır.

**Örnek 4.2.1** *$a \neq 0$ olmak üzere* $\dfrac{|-a| - 2|a| - 3|-a|}{|-a|} = ?$

*Çözüm: $|a| = |-a|$ olduğundan*

$$\frac{|-a| - 2|a| - 3|-a|}{|-a|} = \frac{|a| - 2|a| - 3|a|}{|a|} = \frac{-4.|a|}{|a|} = -4$$

**2.** $a$ ve $b$ birer sayı olmak üzere

$$|a - b| = |b - a|$$

dır.

**Örnek 4.2.2** *$a \neq 1$ olmak üzere* $\dfrac{|a-1| + 2|1-a|}{|a-1|} = ?$

*Çözüm: $|a - 1| = |1 - a|$ olduğundan*

$$\frac{|a-1| + 2|1-a|}{|a-1|} = \frac{|a-1| + 2|a-1|}{|a-1|} = \frac{3|a-1|}{|a-1|} = 3$$

**3.** $a$ ve $b$ birer sayı olmak üzere

$$|a.b| = |a|.|b|$$

dır.

**Örnek 4.2.3** *$a \neq 0$ olmak üzere* $\dfrac{|-a| + |5a| - |-3a|}{|2a| + |-4a|} = ?$

*Çözüm: $|a.b| = |a|.|b|$ ve $|-a| = |a|$ olduğundan*

$$\frac{|-a|+|5a|-|-3a|}{|2a|+|-4a|}=\frac{|a|+|5a|-|3a|}{|2a|+|4a|}=\frac{|a|+5|a|-3|a|}{2|a|+4|a|}=$$

$$\frac{3|a|}{6|a|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

**4.** $a$ ve $b$ birer sayı, $b \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$$

dir.

**5.** $a$ bir sayı ve $n$ bir doğal sayı ise

$$|a^n|=|a|^n$$

dir.

**Örnek 4.2.4** *$a \neq 0$ ve $n$ çift bir doğal sayı olmak üzere*

$$\frac{|(-a)^2|+|5a|^2-|-3a|^2}{|-2a|^2}=?$$

*Çözüm:*

$$\frac{|(-a)^2|+|5a|^2-|-3a|^2}{|-2a|^2}=\frac{|a^2|+|25a^2|-|9a^2|}{|4a^2|}=$$

$$\frac{(1+25-9)|a^2|}{4|a^2|}=\frac{17|a^2|}{4|a^2|}=\frac{17}{4}$$

*Burada note etmek gerekirse $|a^2|=a^2$ olduğuda göz önünde bulundurularak soru çözülebilir.*

**6.** $a$ ve $b$ birer sayı olmak üzere

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

dir.

Mutlak değer tanımından

$$|-8| = |8| = 8$$

olduğunu biliyoruz. Buradan yola çıkarak önemli bir sonuç aşağıdaki gibi verilebilir.

**Sonuç 4.2.5** $a > 0$ *olmak üzere*

$$|x| = a \text{ ise } x = a \text{ veya } x = -a$$

*dır.*

**Örnek 4.2.6** $|x| = 4$ *eşitliğini sağlayan* $x$ *değerlerini bulunuz.*

*Çözüm:* $|x| = 4$ *ise* $x = 4$ *veya* $x = -4$ *dür.*

**Örnek 4.2.7** $|2x| = 4$ *eşitliğini sağlayan* $x$ *değerlerini bulunuz.*

*Çözüm:* $|2x| = 4$ *ise* $2|x| = 4$ *ve* $|x| = 2$ *dir.* $|x| = 2$ *ise* $x = 2$ *veya* $x = -2$ *dir.*

**Sonuç 4.2.8** $|a| + |b| = 0$ *ise* $a = 0$ *ve* $b = 0$ *dır.*

**Örnek 4.2.9** $|a-2| + |b+3| = 0$ *ise* $a.b$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $a - 2 = 0$ *ve* $b + 3 = 0$ *olmalıdır. Buradan* $a = 2$ *ve* $b = -3$ *tür. Böylece* $a.b = 2.(-3) = -6$ *dır.*

**Sonuç 4.2.10** $|a| = |b|$ *ise* $a = b$ *veya* $a = -b$ *dir.*

# 5 KÖKLÜ SAYILAR

Bu bölüme kadar sayıları sınıflandırılırken her bir doğal sayının bir tam sayı ve her bir tam sayılar bir rasyonel sayı olduğu sonuçlarını çıkarmıştık. $a$ ve $b \neq 0$ birer tam sayı iken $\frac{a}{b}$ şeklindeki sayılara rasyonel sayı demiştik. Bu tip sayıların dışında da sayıların varlığı, geometride bir dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiler yardımıyla görülebilir. Dik kenarların uzunlukları 1 birim iken uzun kenarın (hipotenüs ün) uzunluğunu $x$ ise $x^2 = 2$ şartını gerçekleyen x pozitif sayısıdır. 2. kuvveti 2 olan bir rasyonel olmadığını biliyoruz. Aslında buradaki $x$ sayısının $\sqrt{2}$ birim olduğu bilinmektedir. $\sqrt{2}$ sayısı bir rasyonel sayı değildir. Yani $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamaz. Bu tip sayılara rasyonel olmayan (irrasyonel) sayılar denir. Köklü sayıların dışında da irrasyonel sayılar vardır. En çok bilinenlerin arasında $\pi$ ve $e$ (Euler sabiti) sayıları gelir. Bu sayılarda $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamazlar. Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıların bir araya gelerek oluşturduğu sayılara reel sayılar denir. Reel sayılar sayı doğrusunu tam olarak doldururlar.

Öncelikle köklü sayıların en basit hali olan kare köklü sayıları inceleyelim.

## 5.1 Kare köklü sayılar

**Tanım 5.1.1** *$a$ pozitif bir sayı olsun. $x^2 = a$ olacak şekildeki $x$ pozitif sayısına $a$ nın* 2. *dereceden kökü (kare kökü) denir. Bu sayı $x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ ile gösterilir. $\sqrt{a}$ sayısı "kare kök $a$" diye okunur.*

Açıktırki, $a < 0$ iken $\sqrt{a}$ ifadesi bir reel sayı değildir. Çünkü, $x^2 < 0$ olamaz. $\sqrt{a}$ nın bir reel sayı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

$\sqrt{-2}$, $\sqrt{-0,1}$, $\sqrt{-101}$ ifadeleri reel sayı değildirler.

$\sqrt{0}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{1,25}$, $\sqrt{\frac{5}{8}}$ birer reel sayıdır.

**Örnek 5.1.2** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\sqrt{0} = 0$ *dır. Çünkü* $0^2 = 0$ *dır.*

**2.** $\sqrt{4} = 2$ *dir. Çünkü* $2^2 = 4$ *tür.*

**3.** $3\sqrt{4} = 3.2 = 6$

**4.** $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ *dır. Çünkü* $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ *dur.*

**5.** $5\sqrt{\dfrac{4}{25}} = 5.\dfrac{2}{5} = 2$

**6.** $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

**7.** $\sqrt{16} - \sqrt{4} + \sqrt{1} = 4 - 2 + 1 = 3$

**Sonuç 5.1.3** *Yukarıdaki örneklerden ve karekök tanımından aşağıdaki iki sonucu verebiliriz.*

**1.** $a \geq 0$ *ise* $\sqrt{a^2} = a$ *dır.*

**2.** $\sqrt{(-a)^2} = |-a|$ *dır.*

**Örnek 5.1.4** $\dfrac{\sqrt{4^2} - \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{(-1)^2} + \sqrt{1}} = ?$

*Çözüm:* $\sqrt{(-a)^2} = |a|$ *olduğundan* $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$, $\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$ *dir. Buna göre*

$$\frac{\sqrt{4^2} - \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{(-1)^2} + \sqrt{1}} = \frac{4 - 2 + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2}$$

*dir.*

### 5.1.1 Köklü sayının üslü biçimde yazılması

$a \geq 0$ olmak üzere $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ biçiminde yazılır.

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{5^2} = 5^{\frac{2}{2}} = 5^1 = 5$

$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

### 5.1.2 Kare köklü sayılarda bir sayıyı kökün dışına çıkarma veya kökün içine alma

Basit birkaç örnek verelim ve daha sonra genel durumu verelim.

**1.** $\sqrt{8}$ i daha sade yazalım. $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1.2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ olduğundan $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ yazılabilir. Daha basit olarak

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2.2} = (2^2.2)^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

yazılabilir.

**2.** Benzer şekilde $\sqrt{27} = \sqrt{3^2.3} = 3\sqrt{3}$ yazılabilir.

**3.** $\sqrt{72} = \sqrt{2^2.3^2.2} = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

**4.** $\sqrt{125} = \sqrt{5^2.5} = 5\sqrt{5}$.

Yukarıdaki örnekler yardımıyla aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**Sonuç 5.1.5** *$a, b > 0$ olsun.*

**1.** $\sqrt{a^2.b} = a\sqrt{b}$

**2.** $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2.b}$

**Örnek 5.1.6** **1.** $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{4.3} = \sqrt{12}$

**2.** $\sqrt{150} = \sqrt{25.6} = \sqrt{5^2.6} = 5\sqrt{6}$

**3.** $\sqrt{32} = \sqrt{16.2} = 4\sqrt{2}$

**4.** $\sqrt{0,04} = \sqrt{(0,2)^2} = 0,2$

**5.** $\sqrt{0,12} = \sqrt{\dfrac{12}{100}} = \sqrt{\dfrac{4}{100}.3} = \sqrt{(\dfrac{2}{10})^2.3} = \dfrac{2}{10}\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{10}$

### 5.1.3 Köklü sayılarda işlemler

**Toplama-Çıkarma:** Köklü sayılarda toplama çıkarma üslü sayılardakine benzer şekilde yapılır. Aynı cins ifadeler kendi içlerinde toplanır ya da çıkarılır. Yani,

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{a} - z\sqrt{a} = (x + y - z)\sqrt{a}$$

dir.

**Örnek 5.1.7** **1.** $3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(3-4+2)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

**2.** $8\sqrt{6}+\sqrt{6}-3\sqrt{6}=(8+1-3)\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

**3.** $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$

**Örnek 5.1.8** $\sqrt{2}+\sqrt{8}=?$

*Çözüm:* $\sqrt{8}$ *ve* $\sqrt{2}$ *aynı cins olmadığından toplanamaz. Fakat* $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ *olduğundan*

$\sqrt{2}+\sqrt{8}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ *elde edilir.*

**Örnek 5.1.9** $4\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{75}=?$

*Çözüm:* $4\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{75}=4.2\sqrt{3}-2.3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}-6\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

**Çarpma:** $a\geq 0$ ve $b\geq 0$ olsun. Bu halde

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$$

ile yapılır. Çünkü,

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}}=(a.b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a.b}$$

dir.

**Örnek 5.1.10** *Verilen örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{2.3}=\sqrt{6}$

**2.** $\sqrt{2}.\sqrt{2}=\sqrt{2.2}=\sqrt{4}=2$

**3.** $\sqrt{3}.\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

**Örnek 5.1.11** $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}=?$

*Çözüm:* $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}=\sqrt{2}.\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=2$

**Örnek 5.1.12** $\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=?$

*Çözüm:* $\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}.\sqrt{2}-\sqrt{3}.\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{3}-\sqrt{2}.\sqrt{2}=$
$\sqrt{6}-\sqrt{9}+\sqrt{6}-\sqrt{4}=2\sqrt{6}-3-2=2\sqrt{6}-5$

**Sonuç 5.1.13** *$a \geq 0$ ise $\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$ dır.*

**Örnek 5.1.14** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = ?$

*Çözüm:* $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a}.\sqrt{a} + \sqrt{a}.\sqrt{b} - \sqrt{b}.\sqrt{a} - \sqrt{b}\sqrt{b} = a - b$

**Örnek 5.1.15** $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = ?$

*Çözüm:* $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = \sqrt{a}.\sqrt{a} + \sqrt{a}.b - b.\sqrt{a} - b^2 = a - b^2$

**Örnek 5.1.16** $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$ *olduğu görülebilir.*

**Bölme:** $a \geq 0$ ve $b > 0$ olsun. Bu halde

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

dir. Çünkü

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

dir.

**Örnek 5.1.17** *Verilen örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

**2.** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3}$

**3.** $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$ *yada* $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{9.2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$

**4.** $\dfrac{\sqrt{0,4}}{\sqrt{0,2}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{10}}}{\sqrt{\dfrac{2}{10}}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\cancel{\sqrt{10}}}.\dfrac{\cancel{\sqrt{10}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

**Örnek 5.1.18** $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = ?$

*Çözüm:* $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**Örnek 5.1.19** $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=?$

*Çözüm: Paydaları eşitlersek*

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}.(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{3}.\sqrt{2}}=$$
$$\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}-\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}-\sqrt{2}.\sqrt{3})}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-3+2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

*elde edilir.*

### 5.1.4 Paydayı rasyonel yapma

Rasyonel bir terimde payda da köklü sayı bulunması pek hoşumuza gitmez. Bu durumdan kurtulabilmek için daha önce verdiğimiz

$$\sqrt{a}.\sqrt{a}=a$$

ve

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

$$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2$$

$$(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})=a^2-b$$

eşitliklerini kullanarak paydadaki köklü ifadeden kurtulabiliriz.

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

ifadesinde çarpanların her birine diğerinin eşleniği denir. Örneğin, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ifadesi $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ nin eşleniğidir.

**Örnek 5.1.20** $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=?$

*Çözüm: Pay ve payda $\sqrt{2}$ ile çarparsak*

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

*elde edilir.*

**Örnek 5.1.21** $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = ?$

*Çözüm: Pay ve payda* $\sqrt{3}$ *ile çarparsak*

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

*elde edilir.*

**Sonuç 5.1.22** *$a \geq 0$ ve $b > 0$ olmak üzere*

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

*dir.*

**Örnek 5.1.23** $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = ?$

*Çözüm: Pay ve paydayı* $\sqrt{3}-1$ *in eşleniği olan* $\sqrt{3}+1$ *ile genişletilirse*

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1.(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

*elde edilir.*

**Örnek 5.1.24** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = ?$

*Çözüm: Paydalar eşitlenirse*

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1.(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)} + \frac{1.(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$$

*elde edilir.*

### 5.1.5 Kökün Kökü(İç içe kökler)

$a \geq 0$ olmak üzere $\sqrt{a}$ sayısının kare kökünü alalım:

$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

yazılabilir.

**Örnek 5.1.25** $\sqrt{\sqrt{16}} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

**Örnek 5.1.26** $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = ?$

*Çözüm: En içteki köklü sayıdan başlayarak işlemler yapılmalıdır.*

$\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + 2}} = \sqrt{7 + \sqrt{4}} = \sqrt{7 + 2} = \sqrt{9} = 3$

**Örnek 5.1.27** $\sqrt{6.\sqrt{8.\sqrt{4}}} = ?$

*Çözüm:* $\sqrt{3.\sqrt{8.\sqrt{4}}} = \sqrt{3.\sqrt{8.2}} = \sqrt{3.\sqrt{16}} = \sqrt{3.4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

**Sonuç 5.1.28** $x > 0$ *ve* $y > 0$ *olsun.*

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{y}).(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}\sqrt{x}+\sqrt{y}.\sqrt{y} = x+2\sqrt{xy}+y$$

*olduğundan*

**1.** $a > b$ *için* $x = a + b$ *ve* $y = a.b$ *ise* $\sqrt{x + 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

**2.** $a > b$ *için* $x = a + b$ *ve* $y = a.b$ *ise* $\sqrt{x - 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

*dir.*

**Örnek 5.1.29** $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = ?$

*Çözüm:* $x = a + b = 2 + 1 = 3$ *ve* $y = a.b = 2.1 = 2$ *olduğundan* $a = 2$ *ve* $b = 1$ *dir. Buradan*

$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ *dir.*

**Örnek 5.1.30** $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = ?$

*Çözüm:* $x = a + b = 3 + 2 = 5$ *ve* $y = a.b = 3.2 = 6$ *olduğundan* $a = 3$ *ve* $b = 2$ *dir. Buradan*

$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ *dir.*

**Örnek 5.1.31** $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = ?$

*Çözüm:* $x = a + b = 3 + 2 = 5$ *ve* $y = a.b = 3.2 = 6$ *olduğundan* $a = 3$ *ve* $b = 2$ *dir. Buradan*

$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ *dir.*

## Problemler

1. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = ?$
2. $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{3}+\sqrt{50}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = ?$
3. $\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{9}+\sqrt{16}}{\sqrt{4}-5} = ?$
4. $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = ?$
5. $\dfrac{3\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = ?$
6. $\dfrac{\sqrt{24}-3\sqrt{54}+6\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = ?$
7. $\dfrac{2\sqrt{40}+3\sqrt{90}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = ?$
8. $\sqrt{0,09}-\sqrt{0,0025} = ?$
9. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = ?$
10. $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b}) = ?$
11. $(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = ?$
12. $(\sqrt{5}-4).(\sqrt{5}+4) = ?$
13. $(\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}+1) = ?$
14. $(1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2}) = ?$
15. $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = ?$
16. $\dfrac{2}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = ?$
17. $\dfrac{\sqrt{0,8}}{\sqrt{0,2}} = ?$
18. $\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = ?$
19. $\dfrac{2}{2\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}+1} = ?$

20. $\sqrt{6+2\sqrt{8}}-2=?$

21. $\sqrt{6-2\sqrt{8}}+2=?$

22. $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7...}}}=?$

## 5.2 n. dereceden köklü sayılar

Kare köklü sayılar için verilen tanım, özellikler ve işlemlerin genellemesini bu bölümde yapacağız.

**Tanım 5.2.1** *a bir sayı ve n, 1 den büyük bir sayma sayısı olsun.* $x^n = a$ *olacak şekildeki x sayısına a nın n. dereceden kökü denir. Bu sayı* $x = \sqrt[n]{a}$ *ile gösterilir.* $\sqrt[n]{a}$ *sayısı "n. dereceden kök a" diye okunur.*

$\sqrt[2]{a}$ sayısı 2. dereceden kök (karekök) $a$ diye okunur.

$\sqrt[3]{a}$ sayısı 3. dereceden kök (küp kök) $a$ diye okunur.

$\sqrt[4]{a}$ sayısı 4. dereceden kök $a$ diye okunur.

$\sqrt[5]{a}$ sayısı 5. dereceden kök $a$ diye okunur.

$x^n = a$ ifadesinde $n$ çift iken $a$ nın negatif olamayacağı açıktır. Böylece "$n$ çift ve $a < 0$ iken $\sqrt[n]{a}$" bir reel sayı değildir. Ayrıca $n$ tek iken $a$ ne olursa olsun $\sqrt[n]{a}$ ifadesi bir sayıdır. Sonuç olarak, $a \geq 0$ veya $n$ tek iken $\sqrt[n]{a}$ ifadesi bir sayıdır.

$\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[5]{-32}$ birer sayıdır.

$\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-9}$ birer reel sayı değildirler.

$n$. dereceden bir köklü sayıyı üslü biçimde

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

ile yazılır. Daha genel olarak

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

ile verilebilir. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$

$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

**Sonuç 5.2.2** *Yukarıdaki örneklerden ve tanımdan aşağıdaki sonuçları verebiliriz.*

**1.** *$a \geq 0$ ise $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.*

**2.** *$n$ tek sayma sayısı ise $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.*

**3.** *$n$ çift ise $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ dır.*

**Örnek 5.2.3** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

**2.** $\sqrt[3]{2^3} = 3$

**3.** $\sqrt[4]{2^4} = 2$

**4.** $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

**Sonuç 5.2.4** *$k$ bir sayma sayısı ve $a \geq 0$ olsun.*

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k.m}{k.n}} = \sqrt[k.n]{a^{k.m}}$$

*olduğundan $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k.n]{a^{k.m}}$ yazılabilir.*

**Örnek 5.2.5** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\sqrt[4]{36} = \sqrt[2.2]{6^2} = \sqrt[\cancel{2}.2]{6^{\cancel{2}}} = \sqrt{6}$

**2.** $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$

**Sonuç 5.2.6** *$\sqrt[n]{a}$ bir sayı ve $t > 0$ olsun.*

$$\sqrt[n]{t^n a} = (t^n a)^{\frac{1}{n}} = (t^n)^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}} = t\sqrt[n]{a}$$

*olduğundan*

$$\sqrt[n]{t^n a} = t\sqrt[n]{a}$$

*dır.*

**Örnek 5.2.7** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\sqrt{18} = \sqrt{3^2.2} = 3\sqrt{2}$

**2.** $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3.2} = 3\sqrt[3]{2}$

**3.** $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3.3} = 2\sqrt[3]{3}$

**4.** $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2.3} = \sqrt{48}$

**5.** $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3.2} = \sqrt[3]{54}$

**6.** $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{(-1)^3.2} = -1.\sqrt[3]{2}$

**7.** $-2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{(-2)^5.3} = \sqrt[5]{-96}$

$n$. dereceden köklü sayılarda dört işlem kareköklü sayılardakine benzer şekilde yapılır. $\sqrt[n]{a}$ ve $\sqrt[n]{b}$, $n$. dereceden köklü sayılar olmak üzere

**Toplama** $x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$

**Çıkarma** $x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} = (x-y)\sqrt[n]{a}$

**Çarpma** $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

**Bölme** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$

ile yapılır.

**Örnek 5.2.8** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $4\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = (4-5+3)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

**2.** $\sqrt{40}-\sqrt{90}+\sqrt{10}=\sqrt{4.10}-\sqrt{9.10}+\sqrt{10}=2\sqrt{10}-3\sqrt{10}+\sqrt{10}=(2-3+1)\sqrt{10}=0$

**3.** $\dfrac{\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$ =?

*Çözüm:*

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3.3}=3\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8.3}=\sqrt[3]{2^3.3}=2\sqrt[3]{3}$

*olduğundan*

$$\frac{\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=2$$

*elde edilir.*

**4.** $\sqrt[4]{8}.\sqrt[4]{18}.\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{8.18.9}=\sqrt[4]{2^4.3^4}=2.3=6$

Köklü sayıların içinde köklü bir sayı var ise kare köklü sayılarda olduğu gibi üslü yazım kullanılarak

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m.n]{a}$$

eşitliği elde edilir

**Örnek 5.2.9** *Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.*

**1.** $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[3.2]{5}=\sqrt[6]{5}$

**2.** $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3.5}}=\sqrt[6]{40}$

**3.** $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^6}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

**Örnek 5.2.10** $\sqrt{4.\sqrt[3]{100.\sqrt{100}}}$ =?

*Çözüm:* $\sqrt{4.\sqrt[3]{100.\sqrt{100}}}=\sqrt{4.\sqrt[3]{100.10}}=\sqrt{4.\sqrt[3]{10^3}}=\sqrt{4.10}=2\sqrt{10}$

**Örnek 5.2.11** $\sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt[3]{27}}}$ =?

*Çözüm:* $\sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt[3]{27}}}=\sqrt{1+\sqrt{12-3}}=\sqrt{1+\sqrt{9}}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

**Sonuç 5.2.12** *$\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ ise $a=b=0$ dır.*

**Örnek 5.2.13** *$\sqrt{a-3}+\sqrt{b+6}=0$ ise $a.b$ değeri kaçtır?*

*Çözüm: $a=3$ ve $b=-6$ olduğundan $a.b=-18$ dir.*

## Problemler

1. $\dfrac{\sqrt{(-3)^2}-\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[4]{(-4)^4}}{\sqrt[3]{(-4)^3}}=?$
2. $\sqrt[3]{27}-\sqrt[4]{16}+\sqrt[5]{125}=?$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}=?$
4. $x=\sqrt{5}-1$ ve $y=\sqrt{5}+1$ ise $x$, $y$ nin kaç katıdır?
5. $\sqrt{2}.\sqrt[3]{4}$' in eşitini bulunuz?
6. $\sqrt{2}.\sqrt[3]{5}$' in eşitini bulunuz?
7. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{12}+\sqrt{80}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=?$
8. $\sqrt[3]{27^2}$ nin eşitini bulunuz?
9. (DGS2013) $\sqrt{\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{12}}=?$
10. (DGS2013) $2^{\sqrt{x}}.4^{\sqrt{x}}=4$ ise $x=?$
11. (DGS2012) $\sqrt{\dfrac{1}{16}}.\sqrt{0.64}=?$
12. (DGS2012) $a$ ve $b$ pozitif tam sayılar olmak üzere $a=\sqrt[3]{12.b}$ olsun. Buna göre $b$ nin en küçük değeri kaçtır?
13. (DGS2011) $\dfrac{2\sqrt{27}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=?$

# 6 BİR ve İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, bir ve iki bilinmeyenli en basit tipdeki denklemleri ve çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz. Ayrıca mutlak değer içeren denklemler ve üslü denklemleri de ele alacağız.
Denklem, bilinmeyenin(lerin) bazı değerleri için sağlanan eşitliklere denir. Denklemi sağlayan bilinmeyenin değerine(lerine) denklemin çözümü(leri) denir. İki veya daha fazla denklemden ve bilinmeyenden oluşan denklem gruplarına denklem sistemi denir.

$a \neq 0$, $b$, $c$ birer reel sayı ve $x$ bilinmeyen olmak üzere

$$ax + b = c$$

eşitliği bir bilinmeyenli bir denklemdir. Denklemi sağlayan $x$ sayılarına denklemin çözümü denir.

**Örnek 6.0.1** $2x + 5 = 7$ *denklemini alalım.*

- $x = 2$ *denklemin bir çözümü değildir. Çünkü denklemde* $x = 2$ *yazılırsa* $2.2 + 5 = 9 \neq 7$ *olduğundan* $x = 2$ *denklemi sağlamaz.*

- $x = 1$ *denklemin çözümüdür. Çünkü* $x = 1$ *yerine yazılırsa* $2.1 + 5 = 7 = 7$ *denklemi sağlar.*

$a, b, c, d, e, f$ birer sayı ve $x, y$ bilinmeyenler olmak üzere

$ax + by = c$

$dx + ey = f$

iki denklemle oluşan yapıya iki bilinmeyenli lineer denklem sistemi denir. Böyle bir denklem sisteminin çözümü iki denklemide sağlayan $x$ ve $y$ sayılarıdır. Bu ikili $(x, y)$ ile gösterilir. Bir denklemin sağlanması çözüm olmak için yeterli değildir.

**Örnek 6.0.2** *Verilen*

$2x + y = 7$

$x - y = 2$

*iki bilinmeyenli denklem sistemini düşünelim.* $x = 3$ *ve* $y = 1$ *için* $(3,1)$ *ikilisi verilen denklem sisteminin çözümüdür. Çünkü iki denklemide sağlar.*

Çözüm yönteminin ayrıntılarına geçmeden önce başlıkta yer alan "lineer" olma kavramını açıklayalım. Bir bilinmeyenli bir denklemde bilinmeyen $x$ olsun. Şayet bir denklemde $x$ in en fazla birinci kuvveti varsa bu tip denklemlere lineer denir. Diğer taraftan bir denklemde $x$ in ikinci veya daha fazla kuvvetlerinden en az bir tanesi varsa bu türden bir denkleme lineer olmayan denklem denir. Bu tip denklemler $x$ in en büyük dereceli terimi ile isimlendirilir. Örneğin,

$2x + 6 = 0$ denklemi 1. dereceden bir bilinmeyenli lineer bir denklemdir.

$3x^2 - 2x + 6 = 0$ denklemi 2. dereceden bir bilinmeyenli lineer olmayan bir denklemdir.

$x^3 - 5x^2 + 6 = 5$ denklemi 3. dereceden bir bilinmeyenli lineer olmayan bir denklemdir.

$x^8 - x^4 = 0$ denklemi 8. dereceden bir bilinmeyenli lineer olmayan bir denklemdir.

İki bilinmeyenli bir denklemde, bilinmeyenler birbirleriyle ve kendileriyle çarpım durumunda değilse bu tip denklemlere lineer denir.
Örneğin,

$2x + y = 7$

$x - y = 2$

denklem sistemi iki bilinmeyenli lineer denklemdir.

$2x^2 + xy = 7$

$x - y^2 = 2$

denklem sistemi iki bilinmeyenli lineer olmayan bir denklemdir.
Biz burada öncelikle 1. dereceden (lineer) bir bilinmeyenli denklemleri ele alacağız. Daha sonra iki bilinmeyenli lineer denklem sisteminin çözüm yöntemlerini vereceğiz. Son olarak, bir bilinmeyenli ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini de inceleyeceğiz.

## 6.1 Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Çözümü

$a \neq 0$ olmak üzere

$$ax + b = c$$

denkleminin çözümü olan $x$ i bulalım:

$ax + b = c$ eşitliğinin her iki tarafından $b$ çıkartılırsa ($+b$ sağ tarafa atılırsa)

$ax + b - b = c - b$

$ax = c - b$ elde edilir,

$ax = c - b$ eşitliğinin her iki tarafı $a$'ya bölünürse

$x = \dfrac{c-b}{a}$ elde edilir.

**Örnek 6.1.1** $2x + 4 = 16$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$2x + 4 = 16$ *eşitliğinde* 4 *sağ tarafa atılırsa*

$2x = 16 - 4$

$2x = 12$ *eşitliğinin her iki tarafı* 2 *ile bölünürse*

$x = \dfrac{12}{2} = 6$ *elde edilir.*

**Örnek 6.1.2** $5x - 3 = 12$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$$5x - 3 = 12$$
$$5x = 12 + 3$$
$$5x = 15$$
$$x = \frac{15}{5}$$
$$x = 3$$

**Örnek 6.1.3** $6x + 6 = -11$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$$\begin{aligned} 6x + 6 &= -11 \\ 6x &= -11 - 6 \\ 6x &= -17 \\ x &= -\frac{17}{6} \end{aligned}$$

**Örnek 6.1.4** $\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{3}$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 1 &= \frac{1}{3} \\ \frac{x}{2} &= \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{x}{2} &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

*Son eşitliğinin her iki tarafı* $\frac{1}{2}$ *ile bölünürse*

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} &= \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \\ x &= -\frac{3}{2}.\frac{2}{1} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Örnek 6.1.5** $\frac{2x}{3} = \frac{5}{2}$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:* $\frac{2x}{3} = \frac{5}{2}$ *denkleminde her iki tarafı* $\frac{2}{3}$ *ile bölünürse*

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}.\frac{3}{2} \\
x &= \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

*elde edilir.*

*Diğer taraftan bu denklem şu şekilde de çözülebilir:*

$\frac{2x}{3} = \frac{5}{2}$ *denkleminde eşitliğin her iki tarafı 3 ile çarpılırsa:*

$$
\begin{aligned}
3.\frac{2x}{3} &= 3.\frac{5}{2} \\
2x &= \frac{15}{2}
\end{aligned}
$$

*ve* $2x = \frac{15}{2}$ *eşitliğinin her iki tarafı* 2 *ile bölünürse:*

$$
\begin{aligned}
\frac{2x}{2} &= \frac{15}{2.2} \\
x &= \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

Bir denklemde, eşitliğin iki tarafında $x$ li terimler var olabilir. Bu durumda bilinmeyen terimler bir tarafa diğer terimler bir tarafa getirilerek işlemler yapılır.

**Örnek 6.1.6** $5x + 2 = 2x - 16$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$$
\begin{aligned}
5x+2 &= 2x-16 \\
5x-2x &= -16-2 \\
3x &= -18 \\
x &= \frac{-18}{3} \\
x &= -6
\end{aligned}
$$

**Örnek 6.1.7** $\frac{2x}{3} - 1 = 2x + \frac{5}{2}$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$$
\begin{aligned}
\frac{2x}{3} - 1 &= 2x + \frac{5}{2} \\
\frac{2x}{3} - 2x &= 1 + \frac{5}{2} \\
\frac{2x-6x}{3} &= \frac{5+1.2}{2} \\
\frac{-4x}{3} &= \frac{7}{2} \\
x &= \frac{\frac{7}{2}}{\frac{-4}{3}} \\
x &= -\frac{21}{8}
\end{aligned}
$$

**Özellik 6.1.8** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *eşitliğinde her iki tarafı b.d ile çarparsak*

$$b.d.\frac{a}{b} = b.d.\frac{c}{d}$$

*ve sadeleştirmeler yapılırsa*

$$a.d = b.c$$

*elde edilir. Sonuç olarak*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise } a.d = b.c$$

dir.

**Örnek 6.1.9** $\dfrac{2}{3x+1} - 2 = \dfrac{5}{2}$ *denklemini çözelim.*

*Çözüm:*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3x+1} - 2 &= \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3x+1} &= 2 + \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3x+1} &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

*ve buradan*

$$\begin{aligned} 9.(3x+1) &= 2.5 \\ 27x + 9 &= 10 \\ 27x &= 1 \\ x &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

*bulunur.*

**Özellik 6.1.10** *Özel iki örnek verelim.*

**1.** $3x - 6 = 3(x-2)$ *denklemini çözelim.*

$2x - 6 = 3(x-2)$ *ise* $2x - 6 = 2x - 6$ *ve* $0 = 0$ *elde edilir. Açıktır ki* $x$ *yerine hangi sayı konursa konsun eşitlik gerçekleneceğinden bu denklem bütün* $x$ *reel sayıları için sağlanır.*

**2.** $2x - 5 = 2(x+3)$ *denklemini çözelim.*

$2x - 5 = 2(x+3)$ *ise* $-5 = 6$ *olduğundan* $x$ *sayısı ne olursa olsun eşitlik gerçeklenmez. Böylece denklemin çözümü yoktur.*

## Problemler

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1. $5x = -10$
2. $\frac{x}{3} - 2 = 8$
3. $6(2x+1) - 4(2-4x) = 5(3x+4)$
4. $\frac{2x-1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{x-1}{3}$
5. $\frac{4}{4x-3} = 5$
6. $x, y, z \neq 0$ olmak üzere $\frac{2}{x} = \frac{1}{y} - \frac{3}{z}$ ise $y$ yi $x$ ve $z$ cinsinden hesaplayınız.
7. $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2x}{3} - 2$
8. $\frac{1}{2} = \frac{ax+b}{a-b}$
9. $\frac{4}{2x-1} = \frac{3}{1-x}$
10. $\sqrt{0,09}x = \sqrt{0,0027}$
11. $0,2.10^{-6}x = 0,06.10^{-5}$
12. $0,2.10^{-2}x + 2.10^{-1}x = 202.10^{-3}$
13. $\frac{12}{1 + \frac{3}{x+2}} = 4$
14. $\frac{16}{1 + \frac{3}{2 + \frac{4}{1+x}}} = 8$
15. $\frac{x}{4x-3} + \frac{3}{2} = 5$

## 6.2 Mutlak Değer İçeren Denklemler

Mutlak değerin temel özelliklerini kısaca hatırlatalım:

**1.** $a$ bir sayı ise

$$|a| = |-a|$$

dır.

**2.** $a$ ve $b$ birer sayı olmak üzere

$$|a-b| = |b-a|$$

dır.

**3.** $a$ ve $b$ birer sayı olmak üzere

$$|a.b| = |a|.|b|$$

dır.

**4.** $a$ ve $b$ birer sayı, $b \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$$

dir.

**5.** $a$ bir sayı ve $n$ bir doğal sayı ise

$$|a^n| = |a|^n$$

dir.

**6.** $a$ ve $b$ birer sayı olmak üzere

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

dir.

**7.** $a > 0$ olmak üzere

$$|x| = a \text{ ise } x = a \text{ veya } x = -a$$

dır.

**8.** $|a| + |b| = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$ dır.

**9.** $|a| = |b|$ ise $a = b$ veya $a = -b$ dir.

Yukarıdaki özellikler yardımıyla bazı denklemleri çözebiliriz. Bunun ilgili bazı örnekler verelim.

**Örnek 6.2.1** $|2x| = 6$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:* $|2x| = 6$ *ise* $2x = 6$ *veya* $2x = -6$ *dır.*

$2x = 6$ *ise* $x = 3$ *tür.*

$2x = -6$ *ise* $x = -3$ *tür.*

*Sonuç olarak,* $|2x| = 6$ *denkleminin çözümleri* $x = 3$, $x = -3$ *tür.*

**Örnek 6.2.2** $|1 - 3x| = 7$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:* $|1 - 3x| = 7$ *ise* $1 - 3x = 7$ *veya* $1 - 3x = -7$ *dır.*

$1 - 3x = 7$ *ise* $-3x = 7 - 1$, $-3x = 6$ *ve* $x = -2$ *dir.*

$1 - 3x = -7$ *ise* $-3x = -7 - 1$, $-3x = -8$ *ve* $x = \dfrac{8}{3}$ *tür.*

*Sonuç olarak,* $|1 - 3x| = 7$ *denkleminin çözümleri* $x = -2$, $x = \dfrac{8}{3}$ *tür.*

**Örnek 6.2.3** $|3x| + |-2x| = 15$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:*$|3x| = |3||x| = 3|x|$ *ve* $|-2x| = |-2||x| = 2|x|$ *olduğundan*

$|3x| + |-2x| = 3|x| + 2|x| = 5|x| = 15$, $5|x| = 15$ *ise* $|x| = 3$ *tür.*

$|x| = 3$ *ise* $x = -3$ *veya* $x = 3$ *elde edilir.*

**Örnek 6.2.4** $||4x - 6| - 2| = 8$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:*$||4x - 6| - 2| = 8$ *ise* $|4x - 6| - 2 = 8$ *veya* $|4x - 6| - 2 = -8$ *dir.*

$|4x - 6| = 10$ *ise* $4x - 6 = 10$ *veya* $4x - 6 = -10$ *dür.*

$4x - 6 = 10$ *ise* $4x = 16$ *ve* $x = 4$ *dür.*

$4x - 6 = -10$ *ise* $4x = -4$ *ve* $x = -1$ *dir.*

$|4x - 6| = -6$ *eşitliğinde mutlak değerin sonucu negatif olamayacağından bu eşitlikten çözüm(ler) elde edilemez.*

*Böylece, verilen denklemin çözümleri* $x = 4$, $x = -1$ *dir.*

**Örnek 6.2.5** $|3x| = |x + 6|$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm: Özellik (9) dan;*

$$|3x| = |x+6| \ ise\ 3x = -(x+6) \ veya\ 3x = x+6 \ dır.$$

$3x = -(x+6)$ *ise* $4x = -6$ *ve* $x = -\dfrac{3}{2}$ *elde edilir.*

$3x = x+6$ *ise* $2x = 6$ *ve* $x = 3$ *elde edilir.*

*Böylece verilen denklemin çözümleri* $x = 3$ *ve* $x = -\dfrac{3}{2}$ *dir.*

**Örnek 6.2.6** $|3a-5| + |b+6| = 0$ *ise* $a.b$ *kaçtır.*

*Çözüm: Özellik (8) den;*

$|3a-5| + |b+6| = 0$ *ise* $3a-5 = 0$ *ve* $b+6 = 0$ *dır. Böylece* $a = \dfrac{5}{3}$ *ve* $b = -6$ *dır.* $a.b = -6.\dfrac{5}{3} = -10$ *dur.*

**Problemler**

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1. $|6x+8| = 16$

2. $|3x - \dfrac{1}{2}| = 0$

3. $||4x+8| - 3| = 1$

4. $|4x| - |-2x| - |x| = 14$

5. $|4x| = |x+15|$

6. $|5x| = x + 15$

7. $|x+a| = 5$ denkleminin kökleri toplamı 6 ise $a$ yı bulunuz.

## 6.3 Üslü İfade İçeren Denklemler

### 6.3.1 Eşit tabana sahip denklemler

Hatırlanırsa 0 ve 1 in bütün kuvvetleri sırası ile 0 ve 1, $-1$ in çift kuvvetlerinin 1 tek kuvvetlerinin $-1$ olduğunu daha önceki bölümlerde söylemiştik. Bu halde;

$a \neq \pm 1$ ve $a \neq 0$ iken

$$a^m = a^n \text{ ise } m = n$$

dir.

**Örnek 6.3.1** $5^{2x} = 5^4$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:* $5^{2x} = 5^4$ *ise* $2x = 4$ *ve* $x = 2$ *dir.*

**Örnek 6.3.2** $5^x = 125$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:* $5^x = 5^3$ *ise* $x = 3$ *dür.*

**Örnek 6.3.3** $3^{x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:* $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = (3^{-1})^{2x-1} = 3^{-2x+1}$ *olduğundan verilen eşitlik* $3^{x+1} = 3^{-2x+1}$ *halini alır.*

*Bu ise* $x + 1 = -2x + 1$ *eşitliğini verir. Bu denklem çözülürse* $x = 0$ *değeri elde edilir.*

**Örnek 6.3.4** $8^x = \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$ *eşitliğini sağlayan* $x$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $8^x = 2^{3x}$ *ve* $(\frac{1}{16})^{x+2} = (16^{-1})^{x+2} = (2^{-4})^{x+2} = 2^{-4x-8}$ *olduğundan verilen eşitlik* $2$ *tabanında yazılırsa*

$$2^{3x} = 2^{-4x-8}$$

*halini alır.*

*Buradan da* $3x = -4x - 8$, $7x = -8$ *ve* $x = -\frac{8}{7}$ *dır.*

**Örnek 6.3.5** $\frac{3^x + 3^x + 3^x}{9^x} = 27$ *eşitliğini sağlayan* $x$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $3^x + 3^x + 3^x = 3.3^x = 3^{x+1}$, $9^x = 3^{2x}$ *ve* $27 = 3^3$ *olduğu açıktır. Bu eşitlikler denklemde yazılırsa*

$$\begin{aligned}
\frac{3^x + 3^x + 3^x}{9^x} &= 27 \\
\frac{3^{x+1}}{3^{2x}} &= 3^3 \\
3^{x+1}.3^{-2x} &= 3^3 \\
3^{x+1-2x} &= 3^3 \\
3^{-x+1} &= 3^3
\end{aligned}$$

*eşitliği elde edilir. Böylece*

$$\begin{aligned} -x+1 &= 3 \\ -x &= 3-1 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

*değeri elde edilir.*

**Örnek 6.3.6** $2^{x-1}+2^{x+1}-2^{x+2}=-\dfrac{3}{16}$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm: Öncelikle denklemin sol kısmını düzenlersek:*

$$2^{x-1}+2^{x+1}-2^{x+2}=2^x.2^{-1}+2^x.2-2^x.2^2=2^x(\frac{1}{2}+2-4)$$

*elde ederiz. Bu eşitlik denklemde yerine yazılıp, düzenlenirse*

$$\begin{aligned} 2^x.(\frac{1}{2}+2-4) &= -\frac{3}{16} \\ 2^x.(-\frac{3}{2}) &= -\frac{3}{16} \\ 2^x &= -\frac{3}{16}.(-\frac{2}{3}) \\ 2^x &= 8^{-1} \\ 2^x &= 2^{-3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

*çözümü elde edilir.*

## Problemler

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1. $9^{x-2}=\dfrac{1}{81}$
2. $4^{x-2}=8^{2x}$
3. $\sqrt{8^x}=\dfrac{1}{2}$
4. $5^{2x}.25^x.125^{-x}=5$
5. $\dfrac{9^{3y}}{3^{2-y}}=\dfrac{1}{27}$

6. $\dfrac{8^{3y}}{16^{2-y}} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{4y+3}$

7. $\dfrac{4^x + 4^x + 4^x + 4^x}{8^x} = \dfrac{1}{8}$

8. $5^x + 5^{x+1} - 5^{x-1} = \dfrac{29}{125}$

9. $(0,09)^x = 81.10^{-2x}$

10. $(2x+3)^3 = (4x+2)^3$

11. $(2x+3)^4 = (4x+2)^4$

### 6.3.2 İki Özel Durum

Üslü sayıların özellikleri düşünüldüğünde aşağıdaki iki durum verilebilir.

**1.** $a$ ve $b$ $-1, 0, 1$ den farklı sayılar, $a \neq b$ olmak üzere $a^m = b^n$ ise $m = n = 0$ olmalıdır. Burada $a^0 = b^0 = 1$ olduğunu hatırlayınız.

**Örnek 6.3.7** $5^{x+5} = 3^{2x-y+6}$ *ise* $x.y$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm: Verilen eşitlik* $5^0 = 3^0 = 1$ *durumunda sağlanacağından*

$x + 5 = 0$ *ve* $2x - y + 6 = 0$ *olmalıdır. Buradan*

$x = -5$ *dir.* $x = -5$ *ise* $2.(-5) - y + 6 = 0$ *eşitliğinden* $y = -4$ *elde edilir.*

*Sonuç olarak* $x.y = (-5).(-4) = 20$ *elde edilir.*

**2.** $x^n = 1$ denklemini çözelim. Bu denklem üslü sayıların özellikleri düşünüldüğünde 3 durumda sağlanabilir.

**Durum I.** 1 in bütün kuvvetleri 1 olduğundan $x = 1$ ise denklem sağlanır.

**Durum II.** $x \neq 0$ sayısının 0 ıncı kuvveti 1 olduğundan $x \neq 0$ ve $n = 0$ için sağlanır.

**Durum III.** $-1$ in çift kuvvetleri 1 olduğundan $x = -1$ ve $n$ çift bir tam sayı iken denklem sağlanır.

**Örnek 6.3.8** $5^{2x+6} = 1$ *denklemi* $2x + 6 = 0$ *durumunda sağlanacağından* $x = -3$ *tür.*

**Örnek 6.3.9** $(2x+5)^8 = 1$ *ise* $x$ *in alabileceği değerleri bulunuz?*

*Çözüm:* $(2x+5)^8 = 1$ *eşitliği* $2x+5 = 1$ *veya* $2x+5 = -1$ *iken sağlanır. Buradan*

$2x+5 = 1$ *ise* $2x = -4,\ x = -2$ *dir.*

$2x+5 = -1$ *ise* $2x = -6,\ x = -3$ *dir.*

*Böylece* $x$ *in alabileceği değerler* $x = -2, -3$ *dür.*

**Problemler**

1. $(2x+5)^7 = 1$ ise $x$ kaçtır?

2. $(x+1)^{2x-1} = 1$ denklemini sağlayan $x$ değerlerinin toplamını bulunuz.

## 6.4 İki Bilinmeyenli Lineer Denklemlerin Çözümü

$a, b, c, d, e, f$ birer sayı ve $x, y$ bilinmeyenler olmak üzere

$ax + by = c$

$dx + ey = f$

iki bilinmeyenli lineer denklem sisteminin çözüm ikilisi olan $(x, y)$ çözüm ikilisini elde etme yöntemlerini verelim.

### 6.4.1 Yerine koyma metodu

$ax + by = c$.....(I nolu denklem)

$dx + ey = f$.....(II nolu denklem)

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümü her iki denklemide sağlayan $(x, y)$ ikilisi olduğu için çözüm yapılırken iki denklemde kullanılmalıdır. Yerine koyma metodunun çalışma prensibini açıklamak için bir yol verelim:

**1.** I nolu denklemde $y$ bilinmeyeni $x$ cinsinden yazılır.

$$y = \frac{c - ax}{b},\ b \neq 0$$

**2.** Yukarıdaki eşitlik II nolu denklemde yerine koyulursa

$$dx + e(\frac{c - ax}{b}) = f$$

bir bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklemi çözerek $x$'i bulalım:

$$\begin{aligned}
dx + e(\frac{c - ax}{b}) &= f \\
dx + \frac{ce - aex}{b} &= f \\
\frac{bdx + ce - aex}{b} &= f \\
bdx + ce - aex &= bf \\
(bd - ae)x &= bf - ce \\
x &= \frac{bf - ce}{bd - ae}, \quad bd - ae \neq 0
\end{aligned}$$

**3.** Bulunan $x$ değeri $I$. adımda yerine koyularak $y$ değeri bulunur:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{c - ax}{b} \\
y &= \frac{c - a\dfrac{bf - ce}{bd - ae}}{b}
\end{aligned}$$

Böylece denklemi sağlayan $(x, y)$ ikilisi elde edilir.

Yukarıda anlatılan çözüm yöntemi yerine koyma metodunun çalışma presibini açıklamaktadır. Daha genel olarak bir denklemden bir bilinmeyeni çekip, diğer denklemde yerine yazarak bir bilinmeyenli bir denklem elde edilebilir. Genelde katsayısı 1 olan bilinmeyeni yalnız bırakmak kolaylık sağlayacaktır.

**Örnek 6.4.1** *Aşağıda verilen denklem sistemini çözelim.*

$x + y = 3$

$x - y = 1$

*Çözüm: Verilen yöntem yardımıyla* $I$. *denklemden* $y = 3 - x$ *elde edilir.* $II$. *denklem* $x - y = 1$ *de yerine yazılırsa*

$x - (3 - x) = 1$ *elde edilir. Bu denklem çözülürse*

$x - 3 + x = 1$, $2x = 1 + 3$, $2x = 4$ *ve* $x = 2$ *elde edilir.*

$x = 2$, $I$. *denklemde* $x = 2$ *yerine yazılırsa* $y = 3 - 2$, $y = 1$ *bulunur.*

*Böylece sistemin çözümü* $(2, 1)$ *dir.*

**Örnek 6.4.2** *Aşağıda verilen denklem sistemini çözelim.*

$x - 2y = 0$

$2x - y = 6$

*Çözüm:* $x - 2y = 0$ *ise* $x = 2y$ *dir. İkinci denklemde yerine yazılırsa*

$2(2y) - y = 6$, $4y - y = 6$, $3y = 6$ *ve* $y = 2$ *dir.* $y = 2$ *ise* $x = 2.2$ *den* $x = 4$ *elde edilir.*

**Örnek 6.4.3** *Aşağıda verilen denklem sistemini çözelim.*

$4x + 2y = 5$

$2x - 3y = 2$

*Çözüm:* $4x + 2y = 5$ *ise* $y = \dfrac{5 - 4x}{2}$ *dir. İkinci denklemde yerine yazılırsa*

$$\begin{aligned}
2x - 3(\frac{5 - 4x}{2}) &= 2 \\
2x - \frac{15 - 12x}{2} &= 2 \\
2x - \frac{15}{2} + 6x &= 2 \\
8x &= 2 + \frac{15}{2} \\
8x &= \frac{19}{2} \\
x &= \frac{19}{16}
\end{aligned}$$

*elde edilir.*

$x = \dfrac{19}{16}$ *olduğundan* $y = \dfrac{5 - 4.\frac{19}{16}}{2}$ *den* $y = \dfrac{5 - \frac{19}{4}}{2}$, $y = \dfrac{1}{8}$ *elde edilir.*

### 6.4.2 Yok etme metodu

$ax + by = c$

$dx + ey = f$

Yukarıda verilen iki bilinmeyenli lineer denklem sistemi yok etme metodu yardımıyla çözülürken denklem sistemi, sistemdeki bilinmeyenlerden bir tanesi yok edilerek bir bilinmeyenli lineer bir denkleme dönüştürülür. Yok edilmek istenen bilinmeyenin katsayıları (ters işaretli olmak üzere) eşitlemek amacıyla iki denklemde uygun sayılar ile çarpılır. Taraf tarafa eşitlikler toplanarak denklem sistemi bir bilinmeyenli bir denkleme indirgenir. Bu sayede bilinmeyenler bulunur. Örneklerle bu durumun nasıl yapılacağını verelim

**Örnek 6.4.4** *Aşağıda verilen denklem sistemini çözelim.*

$x + y = 3$

$x - y = 1$

*Çözüm:*

$x + y = 3$

$x - y = 1$

*denklem sisteminde* $y$ *bilinmeyenin katsayıları (ters işaretli olmak üzere) eşittir. İki denklem taraf tarafa toplanırsa*

$x + y + x - y = 3 + 1$

*elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse*

$2x = 4$, $x = 2$ *olarak elde edilir.* $x = 2$ *birinci denklemde yerine yazılırsa* $2 + y = 3$ *eşitliğinden* $y = 1$ *elde edilir. Böylece sistemin çözümü* $(2, 1)$ *olarak elde edilir.*

**Örnek 6.4.5** *Aşağıda verilen denklem sistemini çözelim.*

$4x + 2y = 5$

$2x - 3y = 2$

*Çözüm: Verilen denklemde görüldüğü üzere $x$ ve $y$ nin katsayıları eşit değildir. $x$ in katsayılarını eşitlemek için (zıt işaretli olmak üzere) ikinci denklemi $-2$ ile çarpalım. Böylece*

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ -4x + 6y &= -4 \end{aligned}$$

*elde edilir. Eşitlik taraf tarafa toplanırsa*

$$4x + 2y - 4x + 6y = 5 - 4$$

*elde edilir. Buradan*

$$\begin{aligned} 8y &= 1 \\ y &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

*elde edilir.*
$y = \frac{1}{8}$ *değeri birinci denklemde yerine yazılırsa*

$$\begin{aligned} 4x + 2.\frac{1}{8} &= 5 \\ 4x &= 5 - \frac{1}{4} \\ 4x &= \frac{19}{4} \\ x &= \frac{19}{16} \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Bölüm Problemleri**

1. $5x = 8$ ise $x = ?$

2. $3x - 6 = 8$ ise $x = ?$

3. $3x - 1 = -4$ ise $x = ?$

4. $2 - (1 - 2x) = 4$ ise $x = ?$

5. $2x - 3(1 - 2x) = 4$ ise $x = ?$

6. $1 - 2x - 3(1 + x) = 4x$ ise $x = ?$

7. $2(1 - x) = 3 - 2x$ denkleminin çözümü varmıdır?

8. $2(1 - x) = 2 - 2x$ denkleminin çözümlerini yorumlayınız?

9. $\frac{x}{2} = 5$ ise $x = ?$

10. $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$ ise $x = ?$

11. $\frac{x}{3} - 1 = \frac{1}{5}$ ise $x = ?$

12. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ise $x = ?$

13. $\frac{2x - 1}{5} = \frac{3 - x}{4}$ ise $x = ?$

14. $x + 2y = 4$ ve $2x + 4y + 5z = 20$ ise $z = ?$

15. $$5x - y = -1$$
    $$x + 3y = 6$$
    denklem sistemini çözünüz.

16. (DGS2013) $2^{\sqrt{x}} \cdot 4^{\sqrt{x}} = 4$ ise $x$ kaçtır?

17. (DGS2013) $a$ ve $b$ gerçel sayıları için $2^a = b + 3$ ve $2^{-a} = b - 3$ ise $b^2$ kaçtır?

18. (DGS2013) $x + 2y - 3z = 30$ olduğuna göre $(x + y - 2z) - \frac{1}{5}(2x - y - z)$ ifadesinin değerini bulunuz?

19. (DGS2013) $n$ pozitif tam sayı olsun.

$$\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{n!} = 17$$

ise $n$ kaçtır?

20. (DGS2012) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{x}{2}}$ ise $x =$?

21. (DGS2011) $\dfrac{4.10^a}{5.10^b} = 20^3$ ise $a - b$ farkı kaçtır?

22. (DGS2011) $64^{10} + 16^{16} = x.4^{30}$ ise $x$ kaçtır?

23. (DGS2011) $\dfrac{x-1}{4} - x = \dfrac{x+2}{2}$ ise $x =$?

24. (DGS2011) $(3^x - 1)(3^x + 1) = 26$ ise $x =$?

# 7 PROBLEMLER: Yüzde Hesabı, Sayı Problemleri, Kar-Zarar Problemleri, Basit Faiz Hesabı

## 7.1 Yüzde hesabı

Bir $A$ sayının $\%x$ ini bulalım. Burada $\%x$ ifadesi $\frac{x}{100}$ rasyonel sayısından başka birşey değildir. Buna göre $A$ sayının $\%x$ i

$$A.\frac{x}{100}$$

dür.

**Örnek 7.1.1** 120 *sayısının* %20 *sini bulunuz.*

*Çözüm:* 120 *sayısının* %20 *si*

$$120.\frac{20}{100} = \frac{12\cancel{0}.2\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} = 24$$

*dür.*

**Örnek 7.1.2** 4000 *sayısının* %40 *nı bulunuz.*

*Çözüm:* 4000 *sayısının* %40 *ı*

$$4000.\frac{40}{100} = 1600$$

*dır.*

**Örnek 7.1.3** *Ali* 1500 *lirasının* %60 *ını harcıyor.Geriye ne kadar parası kalır.*

*Çözüm:* 1500 *liranın* %60 *ı*

$$1500.\frac{60}{100} = 900$$

*Geriye kalan para miktarı* $1500 - 900 = 600$ *liradır.*

**Örnek 7.1.4** *Bir sayının* %80 *ni* 1600 *ise bu sayıyı bulunuz.*

*Çözüm:* %80 *ni* 1600 *olan sayı* $A$ *olsun. Buna göre*

$A.\frac{80}{100} = 1600$ *dür. Bu denklemden* $A$ *bulunursa*

$A = \frac{1600.100}{80}$, $A = 2000$ *dir.*

**Problemler**

1. Bir sayının %40 ı ile %80 nin toplamı 2400 ise bu sayıyı bulunuz.
2. Bir su deposunun %40 ı boştur. Bu depoda 120 litre su varsa bu deponun kapasitesini bulunuz.
3. Ali nin parasının %40 ı 22 lira ise Ali nin ne kadar parası vardır?
4. 120 sayısının $\%0,25$ ni bulunuz.
5. $\%0,8$ i 120 olan sayıyı bulunuz.
6. Bir ürünün fiyatı önce %30, sonra %20 indirim yapıyor. İlk satışa göre yapılan tüm indirim yüzde kaçtır?
7. İki sayının toplamı 10 dur. Biri diğerinin %60 ı ise küçük sayıyı bulunuz.
8. $x$ in %20 si ile $y$ nin $\%0,2$ sinin toplamı 4, $x$ in $\%0,8$ i ile $y$ nin %8 nin farkı 2 ise $x$ i bulunuz.

## 7.2 Sayı problemleri

Verilen problem, bir denkleme dönüştürerek problemin çözümüne ulaşılır. Bu amaçla bazı basit yapıları hatırlatalım:
Bir $x$ sayısının

$a$ fazlası $x+a$

$b$ eksiği $x-b$

$\dfrac{a}{b}$ si $x.\dfrac{a}{b}$

$a$ katı $x.a$

$a$ katının b fazlası $a.x+b$

$a$ katının b fazlasının yarısı $\dfrac{a.x+b}{2}$

$a$ fazlasının $\dfrac{b}{c}$ si $(x+a).\dfrac{b}{c}$

$a$ fazlasının $b$ katı $b(x+a)$

ile ifade edilir. Verilen ifadeler çoğaltılabilir.

**Örnek 7.2.1** *Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz.*

$x$ *in* 5 *fazlası* $x+5$

$x$ *in* 8 *eksiğinin 5 katı* $5.(x-8)$

$x$ *in* 5 *katının* 8 *eksiğinin* $5x-8$

$x$ *in 3 fazlasının* $\frac{2}{3}$ *ü* $(x+3)\frac{2}{3}$

$x$ *in* $\frac{4}{5}$ *nin* $\frac{6}{7}$ *si* $x.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}$

**Örnek 7.2.2** *Bir sayının 21 fazlası 35 ise bu sayıyı bulunuz.*

*Çözüm: Aranan sayı* $x$ *olsun. Bu halde* $x+21=35$ *dir. Bu denklem çözülüre* $x=14$ *dür.*

**Örnek 7.2.3** *Bir sayının 9 eksiğinin 3 katı 24 ise bu sayıyı bulunuz.*

*Çözüm:* $3(x-9)=24$, $3x-27=24$, $3x=51$ *ise* $x=17$ *dir.*

**Örnek 7.2.4** *Bir sayının 1 fazlasının* $\frac{2}{3}$ *ü 16 ise bu sayıyı bulunuz.*

*Çözüm:* $(x+1).\frac{2}{3}=16$ *ise* $2x+2=48$, $2x=46$, $x=23$.

**Örnek 7.2.5** *Bir sayının* $\frac{5}{3}$ *nün* $\frac{1}{2}$ *si* 2 *ise bu sayı kaçtır?*

*Çözüm:* $\frac{5}{3}.\frac{1}{2}.x=2$ *ise* $\frac{5x}{6}=2$, $5x=12$, $x=\frac{12}{5}$.

**Örnek 7.2.6** *Bir sayı ile* %40 *nin toplamı 70 ise bu sayıyı bulunuz.*

*Çözüm: Aranan sayı* $x$ *olsun. Bu halde* $x+\frac{40x}{100}=70$ *dir.*

$$\begin{aligned}
\frac{140x}{100} &= 70 \\
x &= 70.\frac{100}{40} \\
x &= 50
\end{aligned}$$

**Örnek 7.2.7** *Ali ile Ayşe'nin paraları toplamı* $320tl$ *dir. Ali, Ayşe'ye* $30tl$ *verirse paraları eşit olduğuna göre Ali nin ne kadar parası vardır?*

*Çözüm: Ali nin parası* $x$ *olsun. Bu halde, Ayşe'nin parası* $320 - x$ *olur. Ali, Ayşe ye* $30tl$ *verdiğinde paralarının durumu sıra ile* $x - 30$ *ve* $320 - x + 30$ *dur. Paralar bu durumda eşit olduğundan*

$$\begin{aligned} x - 30 &= 320 - x + 30 \\ 2x &= 390 \\ x &= 190 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Örnek 7.2.8** *Bir su deposunun* $\dfrac{5}{7}$ *si boştur. Depoya* $60lt$ *daha su eklenirse yarısı dolu olduğuna göre depo kaç litreliktir?*

*Çözüm: Depo* $x$ *lt olsun. Bu halde* $\dfrac{5x}{7}$ *si boş,* $\dfrac{2x}{7}$ *si doludur.* $60lt$ *su eklenince yarısı dolu olduğuna göre* $\dfrac{2x}{7} + 60 = \dfrac{x}{2}$ *denklemi elde edilir. Denklem çözülürse;*

$$\begin{aligned} \frac{2x}{7} + 60 &= \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{2x}{7} &= 60 \\ \frac{3x}{7} &= 60 \\ x &= 140 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Örnek 7.2.9** *Bir kesrin değeri* $\dfrac{2}{3}$ *dür. Pay ve paydasına* $2$ *eklenirse değeri* $\dfrac{3}{4}$ *olduğuna göre bu kesrin payını bulunuz?*

*Çözüm: Kesir* $\dfrac{2a}{3a}$ *olsun.* $\dfrac{2a+2}{3a+2} = \dfrac{3}{4}$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} 4(2a + 2) &= 3(3a + 2) \\ 8a + 8 &= 9a + 6 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

*elde edilir. Kesrin payı ise* $2a = 2.2 = 4$ *dür.*

**Örnek 7.2.10** *Bir bitki, hergün bir önceki günün* $\frac{1}{3}$ *ü kadar büyüyor. Bu bitki* 4. *günün sonunda* $128cm$ *ise birinci gün kaç cm dir?*

*Çözüm: Bitki ilk gün* $x$ *cm olsun. Buna göre*

*II. gün:* $x + \frac{x}{3} = \frac{4x}{3} cm$ *dir.*

*III. gün:* $\frac{4x}{3} + \frac{4x}{9} = \frac{12x + 4x}{9} = \frac{16x}{9} cm$ *dir.*

*IV. gün:* $\frac{16x}{9} + \frac{16x}{27} = \frac{48x + 16x}{27} = \frac{64x}{27} cm$ *dir.*

*Buradan* $\frac{64x}{27} = 128$, $x = 54cm$ *dir.*

**Örnek 7.2.11** *Bir kişi maaşının* $\frac{3}{8}$ *ni kiraya, kalanının yarısınıda kredi kartına yatırıyor. Geriye* 1500 *lirası kaldıysa kişinin maaşını bulunuz?*

*Çözüm: Kişinin maaşı* $x$ *olsun. Kiraya giden para* $\frac{3x}{8}$, *elde kalan para* $x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8}$ *dir. Kalanın yarısı* $\frac{5x}{16}$ *dır. Buna göre*

$$\frac{5x}{16} = 1500$$

$$x = 4800$$

*dır.*

## Problemler

1. Bir koşu pistinde 20 şer metre ara ile dubalar vardır. Ali 2. dubadan başlayarak 14. dubaya kadar koşuyor. Ali kaç metre koşmuştur?

2. Bir sayının 3 fazlasının çeyreği bu sayının 2 katından 6 fazlasına eşitse bu sayı kaçtır?

3. Bir araç gidecegi yolun önce $\frac{2}{9}$ nu gitmiştir. Daha sonra kalan yolun $\frac{5}{14}$ ini giderek ulaşmak istediği yere 12 km yolu kalmıştır? Bu yolun uzunluğu kaç km dir?

4. Ali bir pastanın $\frac{3}{4}$ nü 15 arkadaşına eşit miktarda paylaştırıyor. Her bir arkadaşına 200 gram pasta düştüğüne göre başlanğıçtaki pasta kaç kilogramdır?

## 7.3 Haraket problemleri

Bir haraketlinin aldığı yol, zaman ve hızı ile belirlenir. $x$ alınan (gidilen) yolu, $V$ haraketlinin hızını, $t$ ise $V$ hızı ile gittiği zamanı (süreyi) göstermektedir. Bu gösterimlerle, $x$ yolu $km$ cinsinden, $t$ zamanı $saat$ cinsinden ise $V$ hızı $km/saat$ cinsindendir. Bu birimlerle

$$x = V.t$$

yazılır. $V = 60km/saat$ ifadesi haraketlinin 1 saatte $60km$ yol gittiğini ifade eder. Buradaki birimler diğer birimler cinsinden yazılabilir. Örneğin, $x$ yolu $m$ cinsinden, $t$ $dk$ cinsinden alınırsa $V$ hızı $m/dk$ cinsinden yazılabilir.

**Örnek 7.3.1** *$120km/saat$ hızını $m/dk$ cinsinden yazınız?*

*Çözüm: $1km = 1000m$ ve $1saat = 60dk$ olduğun göre*

$$120km/saat = 120.1000m/60dk = 2000m/dk$$

*dır.*

**Örnek 7.3.2** *Bir araç A kentinden B kentine $80km/saat$ hızla 4 saatte gidiyor. Bu iki kent arası kaç km dir?*

*Çözüm: A, B arası $x$ km ise $|AB| = x$ yazılacaktır. $|AB| = x = 80\dfrac{km}{saat}.4saat = 320km$ dir. Burada zaman birimleri sadeleşerek sonuç km cinsinden bulunur.*

**Örnek 7.3.3** *Bir araç A şehrinden B şehrine sabit hızla 5 saatte gidiyor. Hızını $20km/s$ arttırarak 3 saatte geri dönüyor. Buna göre A ve B şehirleri arası kaç kmdir?*

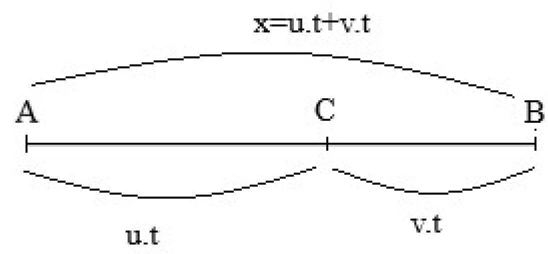
*Çözüm: A'dan B'ye $v$ $km/s$ hızla giderse A, B arası $5v$ dir. Geriye dönüşte B, A arası $3(v+20)$ dir. A ile B arası uzaklık ile B ile A arası uzaklık aynı olduğundan*

$5v = 3(v+20)$, $5v = 3v+60$, $2v = 60$, $v = 30km/s$ *dir.*

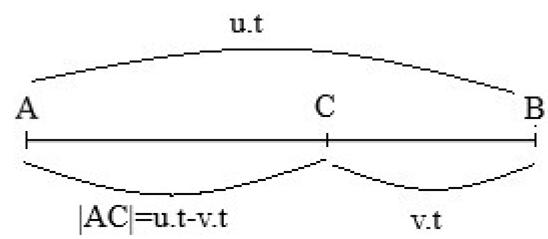
*Böylece A, B arası $5v = 5.30 = 150km$ dir*

### 7.3.1 İki haraketlinin birbirine göre durumları

Bu bölümde iki haraketlinin bir birine göre durumlarını inceleyerek, bu durumlara ait matematiksel denklemleri ortaya çıkaracağız. Burada üç temel durum vardır.




Şekil 4: Durum I için görsel




Şekil 5: Durum II için görsel

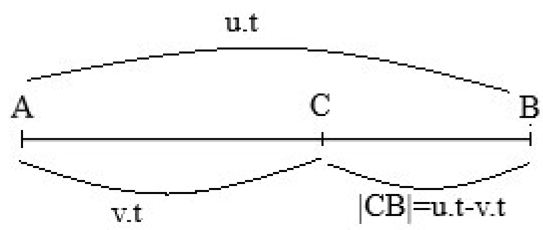
**Durum I:** $A$'dan $B$'ye $u$ hızı ile hareket eden ve $B$'den $A$'ya $v$ hızı ile hareket eden iki araç aynı anda harakete başlayıp $t$ saat sonra aradaki bir $C$ noktasında karşılaşıyorlarsa, $A$ ile $C$ arası $ut$, $CB$ arası $vt$ uzaklığa sahiptir. Böylece $A$ ile $B$ arası $ut + vt$ uzaklığına sahiptir (Figure 4).

**Örnek 7.3.4** *$A$ şehrinden $80km/saat$ hızla ve $B$ şehrinden $100km/saat$ hızla birbirlerine doğru aynı anda harekete başlayan iki araç 4 saat yol gittikten sonra $C$ şehrinde karşılaşıyorlarsa $A$ ile $B$ şehirlerinin uzaklığı kaç kmdir?*

*Çözüm:* $|AB| = 80.4 + 100.4 = 320 + 400 = 720$ *km dir.*

**Durum II:** $C$ şehri $A$ ile $B$ şehirleri arasında olmak üzere $A$'dav $u$ hızı ile $B$'ye doğru ve $C$'den $v$ hızı ile $B$'ye doğru hareket eden iki araç $t$ süre sonra $B$'ye aynı anda ulaşıyorlarsa, $|AC| = ut - vt$ 'dir (Figure 5).

**Örnek 7.3.5** *$A$ şehrinden $120km/saat$ hızla $B$ şehrine hareket eden bir araç ile aynı anda $A$ ile $B$ şehirleri arasındaki $C$ şehrinden $90km/saat$ hızla başka*




Şekil 6: Durum III için görsel

*bir araç B şehrine doğru harakete başlıyorlar.* 6 *saat sonra ikiside aynı anda B şehrine ulaştığına göre A ile C şehirleri arasındaki uzaklığı bulunuz?*

*Çözüm: Figure 5'e göre* $|AC| = 120.6 - 90.6 = 30.6 = 180$ *km dir.*

**Durum III:** $u > v$ ve $C$ şehri $A$ ile $B$ arasında olsun. $A$'dan sırası ile $u$ ve $v$ hızına sahip iki araç $B$'ye doğru harekete aynı anda başlıyorlar. Hızlı olan araç $t$ süre sonra $B$'ye ulaştığında hızı daha az olan araç $C$'ye ulaşıyor. Bu halde $C$'nin $B$'ye uzaklığı

$$|CB| = ut - vt$$

dir (Figure 6).

## 7.4 Yaş problemleri

Yaş problemlerinde dikkat edilmesi gereken bazı hususlar aşağıdaki gibidir:

1. $x$ ve $y$ yaşındaki iki kişinin $a$ yıl sonraki yaşları $x + a$ ve $y + a$, $b$ yıl önceki yaşları $x - b$ ve $y - b$ dir.

2. İki kişinin yaşları farkı her zaman aynıdır.

3. Ali bugün $a$, Ayşe bugün $2a$ yaşında olsun. Ali $a$ yıl sonra Ayşe nin bugünkü yaşına gelir.

4. Ali bugün $x$, Ayşe bugün $y$ yaşında olsun. Ali Ayşe nin bugünkü yaşına $y-x$ yıl sonra gelir. Çünkü $y - x + x = y$ dir. $y - x$ yıl sonra Ayşe $2y - x$ yaşında olur.

**Örnek 7.4.1** *Ali nin 10 yıl sonraki yaşı 5 yıl önceki yaşının 4 katı olduğuna göre Ali bugün kaç yaşındadır?*

*Çözüm: Ali nin bugünkü yaşı $x$ olsun. Ali nin 10 yıl sonraki yaşı $x + 10$, 5 yıl önceki yaşı $x - 5$ dir. Buradan*

$$\begin{aligned} 4(x-5) &= x+10 \\ 4x-20 &= x+10 \\ 3x &= 30 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Örnek 7.4.2** *Bir anne ile kızının şimdiki yaşları toplamı 58 dir. 4 yıl önce annenin yaşı kızının yaşının 4 katı olduğuna göre annenin şimdiki yaşını bulunuz?*

*Çözüm:* ***I. Yol:*** *Annenin şimdiki yaşı $x$, kızının yaşı $y$ olsun. Buradan $x + y = 58$ dir.*

*4 yıl önce annenin yaşı $x - 4$, kızının yaşı $y - 4$ olduğundan*

$$x - 4 = 4(y - 4)$$

$$x - 4 = 4y - 16$$

$$x - 4y = -12$$

*elde edilir. Elde edilen $x + y = 58$ ve $x - 4y = -12$ denklemleri çözülürse; $x = 44$ bulunur.*

***II. Yol:*** *Annenin yaşı $x$ ise kızın yaşı $58 - x$ tir. 4 yıl önceki yaşları annenin $x - 4$, kızının $58 - x - 4$ olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir:*

$$\begin{aligned} x-4 &= 4(58-x-4) \\ x-4 &= 216-4x \\ 5x &= 220 \\ x &= 44 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Örnek 7.4.3** *Ayşe'nin yaşı Ali'nin yaşının 3 katıdır. Ali Ayşe'nin bugünkü yaşına geldiğinde yaşları toplamı 88 olduğuna göre Ali bugün kaç yaşındadır?*
*Çözüm: Ali nin bugünkü yaşı $x$ olsun. Bu halde Ayşe $3x$ yaşındadır. $2x$ yıl sonra Ali Ayşe'nin bügünkü yaşına gelir. Böylece $2x$ yıl sonra Ali $3x$, Ayşe $5x$ yaşında olur. Bu halde*

$$\begin{aligned} 3x + 5x &= 88 \\ 8x &= 88 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

**Örnek 7.4.4** *Bir baba ve çoçuğunun buğünkü yaşları toplamı 47 dir. Çocuğu babanın yaşına geldiğinde yaşları toplamı 73 olduğuna göre babanın buğünkü yaşını bulunuz?*
*Çözüm: Babanın yaşı $x$, çocuğun yaşı $y$ olsun. Bu halde $x + y = 47$ dir. Çocuk $x - y$ yıl sonra babanın yaşına ulaşacağından, $x - y$ yıl sonra baba $2x - y$ ve çocuk $x$ yaşında olur. Bu halde $3x - y = 73$ elde edilir. Elde edilen $x + y = 47$ ve $3x - y = 73$ denklemleri çözülürse babanın yaşı $x = 30$ bulunur.*

**Örnek 7.4.5** *Bir anne ve iki kızının bugünkü yaşları toplamı 56 dir. 3 yıl sonra kızların yaşları toplamı anneni bugünkü yaşının $\frac{1}{3}$ ü olacağına göre anne bugün kaç yaşındadır?*
*Çözüm: Bu gün anne $a$ ve kızları yaşları toplamı $b$ olsun. Bu halde $a + b = 56$ dir. 3 yıl sonra kızların yaşı toplamı $b + 6$ dir ve $b + 6 = \dfrac{a}{3}$ elde edilir. Bu halde $a + b = 56$, $b + 6 = \dfrac{a}{3}$ denklemleri çözülmelidir.*

*$a + b = 56$ ise $b = 56 - a$ dır. Bu eşitlik diğer denklemde yazılırsa*

$$\begin{aligned} 56 - a + 6 &= \frac{a}{3} \\ 3(56 - a) &= a \\ 3.56 &= 4a \\ a &= 48 \end{aligned}$$

*elde edilir.*

## 7.5 Karışım problemleri

Bir sıvı (genel olarak su) içerisine bir katı madde (şeker, tuz vs.) katılarak bir karışım oluşturulsun. Bu karışımdaki sıvı ve katı madde miktarlarının bulunması veya bu miktarların % olarak hesaplanma problemlerine bakalım. Kütlesi $A$ gram olan ve $\%x$ su-şeker karışımına sahip karışımda, $A$ 'nın $\%x$ 'inin, yani $\frac{A.x}{100}$ şeker, geri kalanında $A-\frac{A.x}{100}$ su olduğu açıktır.

**Örnek 7.5.1** 120 *gram su-şeker karışımının* %20 *'si şeker ise karışımdaki şeker miktarını bulunuz?*
*Çözüm:* 120 *gramın* %20 *sini bulursak:* $120.\frac{20}{100}=24$ *gram şeker vardır.*

**Örnek 7.5.2** 200 *gram* %5 *lik su-şeker karışımına* 40*gram daha şeker ilave ediliyor. Son karışımın şeker oranını bulunuz?*
*Çözüm: İlk olarak* 200 *gramlık karışımdaki şeker miktarını bulalım:*

$$200.\frac{5}{100}=10$$

40 *gram daha şeker ilave edilirse karışımdaki şeker miktarı* $40+10=50$ *gramdır. Ayrıca karışımın toplam miktarı* $200+40=240$ *gramdır.* 240 *gramlık karışımın* 50 *gramı şeker olduğuna göre yüzdesi* $x$ *ise:*

$$240.\frac{x}{100}=50$$
$$x=\frac{50.100}{240}$$
$$x=20,83$$

*elde edilir.*

**Örnek 7.5.3** 400 *gram* %20 *lik tuzlu su ile* 800 *gram* %15 *lik tuzlu su karıştırılıyor. Karışımın tuz oranını bulunuz?*
*Çözüm:* 400 *gram* %20 *lik tuzlu sudaki tuz miktarı:*

$$400.\frac{20}{100}=80$$

800 *gram* %15 *lik tuzlu sudaki tuz miktarı:*

$$800.\frac{15}{100}=120$$

*gramdır. Karışım toplamda* 1200 *gram ve tuz miktarı ise* 200 *gramdır. Yüzdesi ise*

$$1200.\frac{x}{100} = 200$$
$$x = 16,66$$

*dır.*

## 7.6 Kar-Zarar problemleri

Öncelikle, kar ve zararın ne demek olduğuna bakalım. Bir satıcı ticaret yapmak (para kazanmak) amacıyla bir ürün alıp satmak istiyor. Bu satıcının, bu malı edinmek için ödediği paraya ürünün maliyeti (alış fiyatı, mal oluş fiyatı), ürünü satarken belirlediği ürünün fiyatına ürünün satış fiyatı denir. Satıcının belirlediği satış fiyatı, maliyet fiyatından küçük, eşit veya büyük olabilir.
$M$ : Maliyeti, $S$ : Satış fiyatını göstermek üzere;

**1.** $S > M$ (yada $S - M > 0$) ise satıcı bu ticaretten para kazanmıştır. Kazandığı para miktarı $S - M$ dir. Bu durum satıcı $K = S - M$ kadar kar elde etmiş diye ifade edilir.

**2.** $S < M$ (yada $S - M < 0$) ise satıcı bu ticaretten para kaybetmiştir. Kaybettiği para miktarı $M - S$ dir. Bu durum satıcı $Z = M - S$ kadar zarar etmiş diye ifade edilir.

**3.** $S = M$ (yada $S - M = 0$) ise satıcı ne para kazanmıştır nede para kaybetmiştir.

Sonuç olarak, para kazanma kar, para kaybetme zarar olarak ifade edilir.

**Örnek 7.6.1** *Bir satıcı* 125 *liraya aldığı bir ürünü* 145 *liraya satmıştır. Kar-zarar durumunu belirleyiniz.*
*Çözüm:* $M = 125$, $S = 145$ *ve* $S - M = 145 - 125 = 20 > 0$ *olduğundan satıcı* 20 *lira kar elde etmiştir.*

**Örnek 7.6.2** *Bir satıcı* 155 *liraya aldığı bir ürünü* 138 *liraya satmıştır. Kar-zarar durumunu belirleyiniz.*
*Çözüm:* $M = 155$, $S = 138$ *ve* $S - M = 138 - 155 = -17 < 0$ *olduğundan satıcı* 17 *lira zarar etmiştir.*

**Örnek 7.6.3** *Bir satıcı* 12 *liraya aldığı bir üründen* 5 *lira kar elde edebilmesi için bu ürünü kaç liraya satmalıdır?*

*Çözüm: Kar= Satış fiyatı-Maliyet olduğundan Satış fiyatı*$= 12 + 5 = 17$ *liradır.*

Alış yada satış işlemlerinde genel olarak yapılan kar yada zarar yüzde olarak ifade edilir. Bu yüzde maliyet üzerinden hesaplanır. $M$ maliyete sahip bir ürün $\%x$ karla satılmak istenirse, satış fiyatı

$$\text{Satış fiyatı} = M + M.\frac{x}{100}$$

$\%y$ zarar ediliyorsa satış fiyatı

$$\text{Satış fiyatı} = M - M.\frac{y}{100}$$

dır.

**Örnek 7.6.4** *Bir satıcı* 120 *liraya aldığı bir üründen* $\%20$ *kar elde edebilmek için kaç liraya satmalıdır.*

*Çözüm: Elde edilmek istenen kar miktarı* 120 *liranın* $\%20$ *olduğundan*

$$Kar = 120.\frac{20}{100} = 24$$

*dır. Satış fiyatı ise* $S = M + K = 120 + 24$ *den* $S = 144$ *dür.*

**Örnek 7.6.5** 80 *liraya alınan bir ürünün* $\%15$ *zararla satış fiyatını bulunuz.*

*Çözüm:* $Zarar = 80.\frac{15}{100} = 12$ *lira olduğundan* $S = M - Z = 80 - 12 = 68$ *den* $S = 68$ *liradır.*

**Örnek 7.6.6** 160 *liraya alınan bir ürün* 200 *liraya satıldığına göre yüzde kaç kar elde edilmiştir.*

*Çözüm:* $200 - 160 = 40$ *lira kar elde edildiğine göre*
$160.\frac{x}{100} = 40$ *ise* $x = \frac{40.100}{160} = 25$ *dir.*

**Örnek 7.6.7** $\%20$ *kar ile* 1800 *liraya satılan bir ürünün maliyetini bulunuz.*

*Çözüm:* $M$ *maliyet ve* $\%20$ *kar ile 1800 liraya satılıyor ise*

$$M + M.\frac{20}{100} = 1800tl$$

*dir. Buradan $M$ maliyeti*

$$\begin{aligned} M+M.\frac{20}{100} &= 1800 \\ M+\frac{M}{5} &= 1800 \\ \frac{6M}{5} &= 1800 \\ M &= \frac{1800.5}{6} \\ M &= 1500tl \end{aligned}$$

*olarak bulunur.*

Bu bölümde indirim ve zam ifadelerinden de bahsetmek gerekmektedir. Mağazalarda ürünlerin üzerinde yüzde şu kadar indirim, indirimin üstüne yüzde şu kadar daha indirim gibi ifadeler görürüz. Bu ifadeleri nasıl hesaplayacağımıza bakalım. Zam, fiyatı arttırmak, üzerine koymak demektir. İndirim, adı üzerinde fiyatı aşığa çekmek azaltmak demektir. İndirim yada zam satış fiyatı üzerinden yapılır.

**Örnek 7.6.8** 360 *liraya satılan bir ürünün* %30 *indirimli satış fiyatını bulunuz.*
*Çözüm:* 360 *ın* %30 *u* $360.\frac{30}{100}=108tl$ *olduğundan ürünün indirimli satış fiyatı* $360-108=252$ *liradır.*

**Örnek 7.6.9** 400 *liraya satılan bir üründen ilk olarak* %20 *indirim yapılıyor. Daha sonra satış fiyatı üzerinde* %40 *zam yapıldığına göre ürünün son satış fiyatını bulunuz.*
*Çözüm:* 400 *ün* %20 *si* $400.\frac{20}{100}=80tl$ *olduğundan ürünün indirimli satış fiyatı* $400-80=320$ *liradır.*
320 *nin* %15 *i* $320.\frac{40}{100}=128tl$ *olduğundan ürünün son satış fiyatı* $320+128=448$ *liradır.*

### Problemler

1. 150 liraya alınan bir ürün 45 lira zarar ile kaç liraya satılır.
2. 4250 liraya satılan bir üründen 1450 lira kar elde edildiğine göre satış fiyatını bulunuz.

3. 2585 liraya satılan bir üründen 850 lira zarar edildiğine göre satış fiyatını bulunuz.

4. Bir satıcı 850 liraya sattığı bir üründen 142 lira zarar ettiğine göre bu ürünün mal oluş fiyatını bulununuz.

5. 420 lira maliyeti olan bir ürünün %35 karlı satış fiyatını bulunuz.

6. 420 lira maliyeti olan bir ürünün %35 zararla satış fiyatını bulunuz.

7. 1600 liraya alınan bir ürün 1880 liraya satılıyor. Elde edilen kar oranını bulunuz.

8. 1800 liraya alınan bir ürün 1600 liraya satılıyor. Zarar oranını bulunuz.

9. %40 zararla 1200 liraya satılan bir ürünün maliyetini bulunuz.

10. %60 karla 1200 liraya satılan bir ürünün maliyetini bulunuz.

11. %15 zararla 180*tl* ye satılan bir ürünün %15 kar ile satılsaydı ne kadara satılırdı?

12. Bir satıcı bir ürünü %40 kar ile satarken satış fiyatı üzerinden %20 indirim yaparak 336*tl* ye satıyor. Ürünün maliyetini bulunuz?

13. Bir satıcı aldığı bir ürünün yarısını %10 zararla satıyor. Tüm satışdan %10 kar elde edebilmesi için ürünün kalanını yüzda kaç kar ile satmalıdır?

14. 12000 liraya satılan bir motorsikletin satış fiyatı üzerinden önce %18 daha sonra %5 indirim yapılmıştır. Toplam ne kadar indirim yapılmıştır. Bu indirim bir seferde yapılsaydı indirim yüzdesi ne olurdu?

15. Bir emlakçı satışını yaptığı bir ev için %3 komisyon almaktadır. Bir inşaat firması yaptığı bir evin fiyatını 160000 olarak belirlemiş ve bu emlakçı yadımıyla satmak istemektedir. Emlakçı evin satış fiyatına, satış fiyatı üzerinden birinci yıl %5, ikinci yıl %5, üçüncü yıl %10 zam yapmıştır. Bu ev üçüncü yıl satıldığına göre evin son satış fiyatını ve emlakçının komisyonunu hesaplayınız.

## 7.7 Faiz Hesabı

Bu bölümde, ticari matematiğin içeriğinde yer alan basit faiz hesabı ele alınacaktır. Faiz, belli bir miktar paranın geri alınmak üzere belli bir süreliğine kiraya verilmesiyle elde edilen gelir olarak açıklanabilir. Günümüzde, paraya ihtiyacı olan kişiler bankalardan bu ihtiyaçlarını karşılayabilir. Bankalar parayı verdiği kişiden belirlenen süre sonuna kadar paranın kullanım ücreti olarak faiz alır. Benzer şekilde, bir kimsede var olan bir parasını bir bankaya yatırarak (kiraya vererek) belirlenen süre sonunda bankadan faiz geliri elde edebilir.

Faiz hesabı temel olarak iki türlüdür. Şayet para faiz hesaplama süresinin sonuna kadar sabit ise bu tip faiz hesabına *basit faiz hesabı*, para süre sonuna kadar sabit değilse (genel olarak her faiz dönemi sonunda elde edilen faiz gelecek faiz dönemi için anaparaya eklenir) bu tip faiz hesabına *bileşik faiz hesabı* denir.

$A$ faize yatırılan para miktarı(Sermaye, Anapara, Kapital), $n$ anaparanın faizde kaldığı süre (yıl, ay, gün), $r$ faiz oranı (yüzde olarak ifade edilir $\%r$) olmak üzere; $A$ anaparanın $n$ yıl süre sonunda $r$ yıllık faiz oranı ile süre sonunda elde edilen faiz miktarı $F$ ise

$$F = A.n.r$$

ile hesaplanır. Burada $r$ yıllık faiz oranı olduğu (aksi söylenmezse hep böyle) için $n$ süresi yıl dışındaki bir cinsten verilmiş ise $n$'yi yıl cinsine çevirmek gerekmektedir. Örnek olarak,

$n$ ay ise $\dfrac{n}{12}$ yıl

$n$ gün ise $\dfrac{n}{360}$ yıl

alınmak zorundadır (Genelde bankacılık sisteminde 1 yıl 360 gün kabul edilir.). Böylece aylık faiz hesabı

$$F = \frac{A.n.r}{1200}$$

ve günlük faiz hesabı

$$F = \frac{A.n.r}{36000}$$

ile hesaplanmalıdır.

Faiz süresinin sonunda elde edilen faiz geliri ile anaparanın toplamına birikim denir. Birikimi $B$ ile gösterirsek,

$$B = A + F$$

yazılabilir.

**Örnek 7.7.1** *Bir kimse bir bankaya 18000 lirayı* 4 *yıllığına* %2 *faiz oranıyla yatırıyor. Süre sonunda ne kadar faiz elde eder?*

*Çözüm:* $A = 18000$, $n = 4$, $r = \%2 = \frac{2}{100}$ *ve süre yıl cinsinden olduğundan*

$$F = \frac{A.n.r}{100} = \frac{18000.4.2}{100} = 1440tl$$

*elde eder.*

**Örnek 7.7.2** *Bir kimse bir bankaya 2000 lirayı* 8 *aylığına* %6 *faiz oranıyla yatırıyor. Süre sonunda ne kadar faiz elde eder?*

*Çözüm:* $A = 2000$, $n = 8$, $r = 6$ *ve süre ay cinsinden olduğundan*

$$F = \frac{A.n.r}{100} = \frac{2000.8.6}{1200} = 80tl$$

*elde eder.*

**Örnek 7.7.3** *Bir bankaya* 4 *aylığına* %12 *faiz oranıyla yatırılan bir miktar para süre sonunda* 300 *lira faiz getirmektedir. Bankaya yatırılan para miktarını bulunuz.*

*Çözüm: Verilenlere göre* $F = 300$, $n = 4$, $r = 12$ *ve süre ay cinsinden olduğundan*

$$300 = \frac{A.4.12}{1200}$$

*eşitliğinden* $A$ *hesaplanmalıdır. Buna göre*

$$A = \frac{300.1200}{4.12} = 7500$$

*dir.*

**Örnek 7.7.4** *Bir kuruma* 24000 *lira* %2 *faiz oranıyla bir süreliğine yatırılıyor. Süre sonunda* 400 *lira faiz elde edildiğine göre para kaç ay faizde kalmıştır?*
*Çözüm: Verilenlere göre* $F = 400$, $A = 24000$, $r = 2$ *olduğundan*

$$400 = \frac{24000.2.n}{1200}$$

*eşitliğinden* $n$ *hesaplanmalıdır. Buna göre*

$$n = \frac{400.1200}{24000.2} = 10ay$$

*dır.*

## Problemler

1. Bir bankaya 8 aylığına %12 faiz oranıyla yatırılan 5000tl nin birikimini bulunuz?

2. Bir bankaya yatırılan 12000tl, 4 ayda 12400 oldu ise bu paraya uygulanan faiz oranını bulunuz?

3. Bir kuruma 45 günlüğüne yatırılan bir miktar para %45 faiz oranıyla süre sonunda 15600 tl olduğuna göre kuruma yatırılan para miktarını bulunuz?

# 8 ÇARPANLARA AYIRMA ve ÖZDEŞLİKLER

## 8.1 Çarpanlara ayırma

Bir ifadenin, (daha basit yapıda) en az iki ifadenin çapımı biçiminde yazılmasına çarpanlara ayırma diyebiliriz. Bir ifadeyi çarpanlara ayırabilmek için bir çok yöntem vardır. Öncelikle en önemli ve en basit yöntem olan ortak çarpan parantezi alma işlemini uygulayacağız. Bu yöntem bilindiği üzere çarpmanın toplama(yada çıkarma) işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmaktadır. Toplanan (yada çıkarılan) herbir terimde yer alan ortak çarpanları dışarıya alarak yapılır. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

**Örnek 8.1.1** $ax + bx = x(a + b) = (a + b)x$

**Örnek 8.1.2** $ax + bx - cx = (a + b - c)x$

**Örnek 8.1.3** $6x + 4x - 3x = (6 + 4 - 3)x = 7x$

**Örnek 8.1.4** $2yx + 2x = 2x(y + 1)$

**Örnek 8.1.5** $a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$

**Örnek 8.1.6** $x^2 - x = x(x - 1)$

**Örnek 8.1.7** $t^3 - t^2 + t - 1 = t^2(t - 1) + t - 1 = (t - 1)(t^2 + 1)$

**Örnek 8.1.8** $a^3b^2 - a^2b = a^2b(ab - 1)$

**Örnek 8.1.9** $a^8b^2 - a^4b^3 = a^4b^2(a^4 - b)$

**Örnek 8.1.10** $a^5b^4 - a^4b^3 - a^3b^5 = a^3b^3(a^2b - a - b^2)$

**Not 8.1.11** $(a - b) = (-1)(b - a)$ *yazılabilir.*

**Örnek 8.1.12** $5(a - b) + 7(b - a) =?$

*Çözüm:* $(a - b) = (-1)(b - a)$ *olduğundan*

$$5(a - b) + 7(b - a) = 5(a - b) - 7(a - b) = -2(a - b) = 2(b - a)$$

*dır.*

## 8.2 Özdeşlikler

Özdeşlik, yapısı gereği bir denklemmiş gibi algılanabilir. Denklem, bilinmeyenin bazı değerleri için sağlanan eşitliklere demiştik. Özdeşlik ise bilinmeyenin(lerin) her bir değeri (reel sayı) için sağlanan eşitliklere denir. Örneğin,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

eşitliği $a$ ve $b$ nin her değeri için sağlanır. Bu halde bir özdeşliktir. Örneğe bakılırsa ifadenin sol tarafındaki ifade, iki ifadenin çarpımı şeklinde (sağ taraf) yazılmıştır. Böylece $a^2 - b^2$ ifadesi $(a - b)$ ve $(a + b)$ nin çarpımı şeklinde yazılmıştır.
Bu bölümde, çokça kullanılan özdeşlikleri ele alacağız.

### 8.2.1 İki kare farkı

$a$ ve $b$ nin her değeri için

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

dir. Çünkü

$$(a - b)(a + b) = a(a + b) - b(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

dir.

**Örnek 8.2.1** $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$

**Örnek 8.2.2** $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

**Örnek 8.2.3** *$x, y > 0$ olmak üzere $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ olduğunu gösteriniz.*

**Örnek 8.2.4** $(ab)^2 - (xy)^2 = (ab - xy)(ab + xy)$

**Örnek 8.2.5** $9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a - 2b)(3a + 2b)$

**Örnek 8.2.6** $15^2 - 14^2 = (15 - 14)(15 + 14) = 1.29 = 29$

**Örnek 8.2.7** $201^2 - 200^2 = (201 - 200)(201 + 200) = (1).401 = 401$

### 8.2.2 Tam kare farkı ve toplamı

$a$ ve $b$ birer sayı omak üzere

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

olduğundan

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

özdeşlikleri elde edilir.

**Örnek 8.2.8** $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

**Örnek 8.2.9** $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

**Örnek 8.2.10** $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

**Örnek 8.2.11** $(1-\sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$

**Örnek 8.2.12** $(-2a+5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$

**Örnek 8.2.13** $x^2y^2 + 2xy + 1 = (xy+1)^2$

**Örnek 8.2.14** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$

**Örnek 8.2.15** $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Örnek 8.2.16** $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

**Örnek 8.2.17** *$ab = 7$ ve $a^2 + b^2 = 6$ ise $a+b$ yi bulunuz.*

*Çözüm:* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *olduğundan*

$(a+b)^2 = 6 + 14$, $(a+b)^2 = 20$, $a+b = 2\sqrt{5}$ *dir.*

**Örnek 8.2.18** *$a-b = 8$ ve $ab = 10$ ise $a^2 + b^2$ yi bulunuz.*

*Çözüm:* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *olduğundan*

$64 = a^2 - 2.10 + b^2$, $64 + 20 = a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 = 84$ *dür.*

**Örnek 8.2.19** *$a-b = 8$ ve $a+b = -5$ ise $a^2 - b^2$ yi bulunuz.*

*Çözüm:* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ *olduğundan*

$a^2 - b^2 = 8(-5) = -40$ *dır.*

**Örnek 8.2.20** $(a-b)^2-(a+b)^2=8$ *ise* $ab$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $(a-b)^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2-(a^2+2ab+b^2)=-4ab$ *olduğundan* $-4ab=8,\ ab=-2$ *dir.*

**Örnek 8.2.21** $x^2+\dfrac{1}{x^2}=4$ *ise* $x+\dfrac{1}{x}$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ *olduğundan*

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4+2=6$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=6$$
$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$$

*dır.*

**Örnek 8.2.22** $x-\dfrac{1}{x}=5$ *ise* $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ *değerini bulunuz.*

*Çözüm:* $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} 5^2 &= x^2+\frac{1}{x^2}-2 \\ x+\frac{1}{x} &= 25+2 \\ x+\frac{1}{x} &= 27 \end{aligned}$$

*dir.*

### 8.2.3 Farkın ve toplamın küpü

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ yazılabilir. Benzer şekilde $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ yazılabilir.

**Örnek 8.2.23** $(a+3b)^3=a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$

**Örnek 8.2.24** $(a-3b)^3=a^3-9a^2b+27ab^2-27b^3$

### 8.2.4 İki küp farkı ve toplamı

$a$ ve $b$ için

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

eşitlikleri vardır.

**Örnek 8.2.25** *$a - b = 4$ ve $a^2 + ab + b^2 = 5$ ise $a^3 - b^3 = ?$*

*Çözüm:* *$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ olduğundan*

*$a^3 - b^3 = 4.5 = 20$ dir.*

**Örnek 8.2.26** *$a + b = 4$ ve $ab = -2$ ise $a^3 + b^3 = ?$*

*Çözüm:* *$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ olduğundan*

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= 4^3 - 3.(-2).(4) \\ a^3 + b^3 &= 64 + 24 = 88 \\ a^3 + b^3 &= 88 \end{aligned}$$

*dir.*

### 8.2.5 $ax^2 + bx + c$ ifadesinin çarpanlara ayırılması için kısa bir yol

**I. Durum** $a = 1$ olsun.

$x^2 + bx + c$ ifadesi için $c = m.n$ ve $b = m + n$ olacak şekilde öyle iki $m$ ve $n$ sayıları bulunabilirse

$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ dir.

**Örnek 8.2.27** *$x^2 + 5x + 6$ ifadesini çarpanlara ayıralım.*

*Çözüm:* *$c = 6 = 3.2 = m.n$ ve $b = 5 = 3 + 2 = m + n$ olduğundan*

*$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$ dir.*

**Örnek 8.2.28** *$x^2 - 3x + 2$ ifadesini çarpanlara ayıralım.*

*Çözüm:* *$c = 2 = (-1).(-2) = m.n$ ve $b = -3 = -1 - 2 = m + n$ olduğundan*

*$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ dir.*

**Örnek 8.2.29** $x^2 + 4x - 5 = 0$ *denklemini çözünüz.*

*Çözüm:* $c = 5 = (-1).5 = m.n$ *ve* $b = 4 = 5 - 1 = m + n$ *olduğundan* $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5) = 0$ *ise* $x - 1 = 0$ *veya* $x + 5 = 0$ *dir. Böylece* $x = 1$, $x = -5$ *denklemin çözümleridir.*

**II. Durum** $a \neq 0, 1$ olsun.

$ax^2 + bx + c$ ifadesi için $c = m.n$ ve $ax^2 = (dx)(ex)$ olacak şekilde öyle iki çarpım var ve $m(dx) + n(ex) = bx$ ise

$$ax^2 + bx + c = (dx + m)(ex + n)$$

dir. Burada $ax^2$ ve $c$ nin birçok çarpanı olabilir. Önemli olan yukarıdaki eşitlikleri sağlayan çarpanları elde etmektir.

**Örnek 8.2.30** $3x^2 - 5x - 2$ *ifadesini çarpanlara ayırınız.*

*Çözüm:* $c = -2 = (-2)(1)$ *yada* $c = -2 = (2)(-1)$ *ve* $3x^2 = (3x)(x)$ *dir. Ayrıca* $-5x = -2(3x) + 1.(x)$ *olduğundan*

$$3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$$

*ile çarpanlarına ayrılır.*

**Örnek 8.2.31** $3x^2 - 5x - 2 = 0$ *denkleminin çözümlerini bulunuz.*

*Çözüm: Bir önceki örnekten*

$$3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$$

*ile çarpanlara ayırmıştık*

$3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2) = 0$ *ise* $3x + 1 = 0$ *veya* $x - 2 = 0$ *olabileceğinden denklemin çözümleri* $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = 2$ *dir.*

**Örnek 8.2.32** *Kökleri (denklemin çözümleri)* $x = 2$ *ve* $x = -3$ *olan ikinci dereceden bir denklem bulunuz.*

*Çözüm:* $x = 2$ *ve* $x = -3$ *ise* $x - 2 = 0$ *ve* $x + 3 = 0$ *dır.*

$$\begin{aligned} (x-2)(x+3) &= 0 \\ x^2 + 3x - 2x - 6 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

**Örnek 8.2.33** $4x^2 - 4x - 3$ *ifadesini çarpanlara ayırınız.*

*Çözüm:* $c = -3 = (-3)(1)$ *yada* $c = -3 = (3)(-1)$ *ve* $4x^2 = (4x)(x)$ *yada* $4x^2 = (2x)(2x)$ *dir. Ayrıca* $-4x = -3(2x) + 1.(2x)$ *olduğundan*

$$4x^2 - 4x - 3 = (2x-3)(2x+1)$$

*ile çarpanlarına ayrılır.*

## Problemler

Aşağıdaki $1 - 10$ ifadelerini çarpanlarına ayırınız.

1. $x^2 - 4$
2. $x^2 - 2x$
3. $x^3 - 9x$
4. $x^2 - x + 2$
5. $x^2 - 8x + 15$
6. $x^2 - 2x - 8$
7. $2x^2 + x - 1$
8. $-x^2 + 4x - 3$
9. $10x^2 - 17x + 3$
10. $6x^2 + 5x - 6$
11. $6x^2 + 5x - 6 = 0$ denklemini çözünüz.
12. $x^2 - 3x + a = 0$ denkleminin bir kökü (çözümü) $-1$ ise $a$ yı bulunuz.

## 8.3 Çarpanlara ayırma işlemlerinin uygulaması

Rasyonel şekilde verilmiş ifadelerin pay ve paydasındaki terimler çarpanlara ayırılır ve ortak çarpanlar sadeleştirilebilir. Bu sayede başlangıçtaki ifadenin en sade şekli elde edilir.

**Örnek 8.3.1** *$x \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{x^2 - x}{x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{x^2 - x}{x} = \dfrac{x(x-1)}{x} = x - 1$ *elde edilir.*

**Örnek 8.3.2** $\dfrac{ab^2c - a^2bc + abc^2}{abc}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:* $ab^2c - a^2bc + abc^2 = a(b^2c - abc + bc^2) = abc(b - a + c)$ *olduğunu gözlemleyiniz. Böylece*

$$\frac{ab^2c - a^2bc + abc^2}{abc} = \frac{abc(b - a + c)}{abc} = b - a + c$$

*elde edilir.*

**Örnek 8.3.3** $\dfrac{ax + by - ay - bx}{3y - 3x}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:*

$$ax+by-ay-bx = ax-bx+by-ay = x(a-b)+y(b-a) = x(a-b)-y(a-b) = (x-y)(a-b)$$

*olduğu açıktır. Buradan*

$$\frac{ax + by - ay - bx}{3y - 3x} = \frac{(x-y)(a-b)}{3(y-x)} = \frac{b-a}{3}$$

*elde edilir.*

**Örnek 8.3.4** $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x + y$

**Örnek 8.3.5** $\dfrac{c(a-b) - a(c-b)}{c-a}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{c(a-b) - a(c-b)}{c-a} = \dfrac{ca - cb - ac + ab}{c-a} = \dfrac{-cb + ab}{c-a} = \dfrac{-b(c-a)}{c-a} = -b$

**Örnek 8.3.6** $\dfrac{x^4-x^2}{x^3-x^2}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:*
$$\frac{x^4-x^2}{x^3-x^2}=\frac{x^2(x^2-1)}{x^2(x-1)}=\frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)}=x+1$$

**Örnek 8.3.7** $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$ *ifadesinin en sade şeklini bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x-1)}{x-4}=x-1$

**Örnek 8.3.8** $x-\sqrt{x}=2$ *ise* $4x-\dfrac{4x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ *ifadesinin eşitini bulunuz?*

*Çözüm:*

$$\frac{4x\sqrt{x}-4x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{4x}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=4x-4\sqrt{x}+2=4(x-\sqrt{x})+2=8+2=10$$

## Problemler

1. Aşağıdaki ifadelerinin en sade biçimini bulunuz?

**i)** $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$

**ii)** $\dfrac{1}{x^2-4}:\dfrac{1}{x-2}$

**iii)** $\dfrac{ax+cy-cx-ay}{x-y}$

**iv)** $\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x}}$

**v)** $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

**vi)** $\dfrac{x-\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}}:(x-2)$

**vii)** $\dfrac{xy(y-z)+xz(z+y)+y^2+z^2}{y^2+z^2}$

**viii)** $\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2-x}:\dfrac{x-2}{x^2-1}$

**ix)** $\dfrac{(x-1)^2-4}{x^2-3x}$

**x)** $\left[\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x-a}\right].\left[1-\dfrac{x}{a}\right]$

2. $a=1-\sqrt{3}$ ve $b=1+\sqrt{3}$ ise $a^2-b^2$ nin değerini bulunuz?

3. $201^2-200^2=?$

4. $\dfrac{(a-2b)^2+(a+2b)^2}{a^2+4b^2}$ ifadesinin değerini bulunuz?

5. $a$ ve $b$ birer tam sayı olmak üzere $a^2-b^2=13$ ise $a$ en az kaç olabilir?

# 9 ORAN ve ORANTI

Bilim ve doğada bir çok niceliğin birbiriyle ilişkili olduğunu mutlaka gözlemlemişsinizdir. Birinin değerinin artması yada azalması diğerine de artma yada azalma olarak etki eder. Bu durumları matematiksel olarak ele alacağız.

## 9.1 Oran

Saatte 60 kilometre hızla giden bir araç düşünelim. Bunun anlamı, bu araç 1 saatte 60 kilometre yol alıyor demektir. Bu ifadeyi, yolun zamana oranı

$$\frac{60\ km}{1\ sa} = 60\frac{km}{sa}$$

ile yazabiliriz. Böylece hızın birimi $\frac{km}{sa}$ olarak alınabilir. Ayrıca bu ifade diğer birimlerede çevrilebilir. Mesela, bu araç 1 dakikada 1 kilometre yol alır diyebiliriz(Ek-A ya bakınız).
Aynı cinsten niceliklerin oranı alındığında elde edilen ifadenin birimi yoktur. Örneğin,

**1.** $5kg$ ile $7kg$ oranlanırsa, bu oran

$$\frac{5}{7}$$

ile yazılır. Yapılan bu orandan $5kg$, $7kg$ in $\frac{5}{7}$ katı olduğu yorumu yapılabilir.

**2.** Uzunlukları sırası ile 10 metre ve 2 metre olan iki çubuğun uzunlukları oranı $\frac{10}{2}$ dir. Buna birinci çubuk ikinci çubuğun 5 katıdır diyebiliriz.

Sıfırdan farklı aynı cinsten $a$ ve $b$ gibi iki reel sayı ile oluşturulan $\frac{a}{b}$ ifadesine $a$ nın $b$ ye oranı denir. Bu oran, $a$ sayısı $b$ sayısının $\frac{a}{b}$ katı diye anlaşılabilir. Açıktır ki, burada karşılaştırma vardır.

**Örnek 9.1.1** *$a$ ve $b$ gibi iki sayının oranı 2 tir. Birinci sayı 2 azaltıldığında, ikinci sayı 3 arttırıldığında yeni oran $\frac{3}{2}$ olduğuna göre $a$ kaçtır?*
*Çözüm: $a$ nın $b$ ye oranı 2 ise*

$$\frac{a}{b} = 2$$

*dir. Birinci sayı* 2 *azaltıldığında, ikinci sayı 3 arttırıldığında yeni oran* $\frac{3}{2}$ *olduğuna göre*

$$\frac{a-2}{b+3} = \frac{3}{2}$$

*olmalıdır. Birinci ifadeden* $a = 2b$ *ve ikinci ifadeden* $2(a-2) = 3(b+3)$ *olduğu açıktır. İkinci ifadeden* $a$ *yerine* $2b$ *yazılırsa*

$$2(2b-2) = 3(b+3),\ 4b-4 = 3b+9,\ b = 13$$

*elde edilir.* $b = 13$ *ise* $a = 26$ *dır.*

**Problemler**

1. $\frac{a+b}{a} = \frac{2}{3}$ ise $\frac{a+b}{b}$ =?
2. $\frac{a}{b} = 3$, $a-b = 18$ ise $b$ yi bulunuz.
3. $\frac{a}{b} = 3$, $ab = 27$ ise $b$ yi bulunuz.
4. $\frac{a}{b} = 3$, $a+b = 18$ ise $a$ yı bulunuz.
5. $\frac{a+2}{b} = 3$, $a+b = 18$ ise $a$ yı bulunuz.
6. $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ise $\frac{3.a^2}{2.a.b}$ oranını bulunuz?

## 9.2 Orantı

$\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ gibi iki oranın eşitliğine orantı denir. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ gibi bir sayı vardır. Bu $k$ sayısına orantı sabiti denir. Buradan

$$a = bk,\ c = dk \text{ veya } b = \frac{a}{k},\ d = \frac{c}{k}$$

yazılabilir.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısı

$$a : b = c : d$$

ile yazılabilir. Burada $b$ ve $c$ sayılarına içler, $a$ ve $d$ sayılarına dışlar denir.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısı var olsun. Bu halde aşağıdaki özelliklerin doğruluğu kolayca gösterilebilir:

**1.** $ad = bc$

**2.** $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c} = \dfrac{1}{k}$

**3.** $\dfrac{a}{d} = \dfrac{c}{b} = k$ buradan $a = dk$ ve $c = bk$ yazılabilir.

**4.** $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{d} = k$

**5.** $\dfrac{a.t}{b.t} = \dfrac{c.p}{d.p} = k,\ t, p \neq 0$

**6.** $\dfrac{a:t}{b:t} = \dfrac{c:p}{d:p} = k,\ t, p \neq 0$

**Örnek 9.2.1** $\dfrac{a}{b} = 5$ *ise* $\dfrac{a+b}{b} = ?$

*Çözüm:* $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{b} = \dfrac{a}{b} + 1 = 5 + 1 = 6$

**Örnek 9.2.2** $\dfrac{a}{3} = \dfrac{c}{5}$ *ve* $a - c = 8$ *ise* $a + c$ *yi bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{a}{3} = \dfrac{c}{5} = k$ *dersek* $a = 3k$ *ve* $c = 5k$ *dir.* $a - c = 3k - 5k = -2k = 8$ *ise* $k = -4$ *elde edilir. Buradan* $a = -12$ *ve* $c = -20$ *olarak elde edilir. Buradan*

$$a + c = -12 - 20 = -32$$

*dir.*

**Örnek 9.2.3** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5}$ *ve* $a + b = 108$ *ise* $a$ *yı bulunuz.*

*Çözüm:* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5}$ *ise* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4k}{5k}$ *yazılabilir.* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4k}{5k}$ *ise* $a = 4k$ *ve* $b = 5k$ *alınabilir.* $a + b = 4k + 5k = 9k = 108$ *ise* $k = 12$ *dir.* $a = 4k = 4.12 = 48$ *dir.*

**Örnek 9.2.4** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ *ise* $\dfrac{a-c}{b-d} = k$ *olduğunu gösteriniz.*

*Çözüm:* $a = bk$ *ve* $c = dk$ *olduğundan*

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{bk - dk}{b-d} = k\frac{b-d}{b-d} = k,\ b - d \neq 0$$

*elde edilir.*

**Sonuç 9.2.5** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ *iken* $\dfrac{ap+ct}{bp+dt} = k$ *ve* $\dfrac{ap-ct}{bp-dt} = k$ *olduğu benzer şekilde gösterilebilir.*

**Örnek 9.2.6** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 3$ *ise* $\frac{4a+3c}{4b+3d} = 3$ *tür.*

**Örnek 9.2.7** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{2}$ *ise* $\frac{5a-2c}{5b-2d} = \frac{3}{2}$ *dir.*

**Sonuç 9.2.8** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ *iken* $\frac{ac}{bd} = k^2$ *dir.*

**Örnek 9.2.9** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{2}$ *ise* $\frac{ac}{bd} = \frac{9}{4}$ *dür.*

## Problemler

1. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ise $\frac{a-b}{b} =?$
2. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ise $\frac{5a}{b} =?$
3. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \frac{b}{c} = \frac{2}{5}$ ise $\frac{a}{c} =?$
4. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ise $\frac{a-2b}{b} =?$
5. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ise $\frac{3a-2b}{3b} =?$
6. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{5}{3}$ ise $(\frac{a-2b}{b})(\frac{3c-6d}{d}) =?$
7. $\frac{a}{3} = \frac{c}{5}$ ve $3a+2c = 8$ ise $a-2c$ yi bulunuz?
8. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \frac{b}{c} = \frac{2}{5}$ ve $a+b+c = 50$ ise $a$ yı bulunuz?
9. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \frac{b}{c} = \frac{2}{5}$ ise $\frac{a+b}{c}$ yi bulunuz?
10. İki çubuğun uzunlukları arasında $\frac{5}{4}$ oranı vardır. İki çubuğun uzunluk farkı $27cm$ ise uzun çubuğun uzunluğunu bulunuz?
11. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $\frac{a+c}{b+d} = k$ olduğunu gösteriniz.
12. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ve $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ ise $\frac{3a-4c}{3b-4d} =?$

## 9.3 Doğru orantı ve ters orantı

$k$ pozitif bir sayı ve sabit olmak üzere $\frac{a}{b} = k$ olsun. $a = bk$ eşitliğinden $a$ artarken (azalırken) $b$ artar (azalır).

$k$ pozitif bir sayı ve sabit olmak üzere $ab = k$ olsun. $ab = k$ eşitliğinden $a$ artarken (azalırken) $b$ azalır (artar).

Örneğin;

**1.** $\frac{a}{b} = 2$ olsun. $a = 2b$ olduğundan $b = 1$ iken $a = 2$, $b = 2$ iken $a = 4$ vs. olduğundan $b$ artarken $a$ da artmaktadır.

**2.** $a.b = 2$ olsun. $a.b = 2$ olduğundan $b = 1$ iken $a = 2$, $b = 2$ iken $a = 1$ olduğundan $b$ artarken $a$ azalmaktadır.

$\frac{a}{b} = k$ (yada $a = bk$) eşitliğindeki $a$ ve $b$ çokluklarına doğru orantılı çokluklar, $xy = k$ eşitliğindeki $x$ ve $y$ çokluklarına ters orantılı çokluklar denir.

**Örnek 9.3.1** *$a$ ve $b$ doğru orantılı olsunlar. $a = 4$ iken $b = 1$ ise $a = 16$ ise $b$ kaçtır?*

*Çözüm: $a$ ve $b$ doğru orantılı ise $\frac{a}{b} = k$ dır. Bu halde $\frac{4}{1} = \frac{16}{b}$ ise $b = 4$ dür.*

**Örnek 9.3.2** *Bir araç 1 saatte 40km yol giderse 4 saatte kaç km yol gider?*

*Çözüm: Zaman arttıkça gidilen yol artacağından burada doğru orantı vardır. Bu halde $\frac{1}{40} = \frac{4}{x}$ ise $x = 160km$ dir.*

**Örnek 9.3.3** *Bir satıcı 100 lirada 40 lira kar elde ederse 600 lirada ne kadar kar elde eder?*

*Çözüm: Doğru orantıdan dolayı $\frac{100}{40} = \frac{600}{x}$ eşitliğinden $x = 240$ liradır.*

**Örnek 9.3.4** *$a$ ve $b$ ters orantılı olsunlar. $a = 4$ iken $b = 1$ ise $a = 16$ ise $b$ kaçtır?*

*Çözüm: $a$ ve $b$ ters orantılı ise $ab = k$ dır. Bu halde $1.4 = 16.b$ ise $b = \frac{1}{4}$ dür.*

**Örnek 9.3.5** *8 işçinin 6 günde yaptığı bir işi 12 işçi kaç günde yapar?*

*Çözüm: İşçi sayısı arttıkça iş daha kısa sürede biteceğinden burada ters orantı vardır. Bu halde* $8.6 = 12.x$ *ise* $x = 4$ *gündür.*

**Örnek 9.3.6** *4 işçi 6 işi 12 günde yapıyor ise 6 işçi 9 işi kaç günde yapar?*

*Çözüm: Burada üç nicelik vardır. Bu üç nicelik arasında ikişer ikişer düşünerek doğru mu ters mi orantılı olup olmadığı belirlenmelidir. İşçi sayısı ile iş arasında doğru, işçi sayısı ile gün arasında ters, iş sayısı ile gün arasında ise doğru orantı vardır. Buna göre*

$$\begin{aligned} \frac{4}{6} &= \frac{6}{9} \\ 12.\frac{4}{6} &= x.\frac{6}{9} \\ 12.4.9 &= 6.6.x \\ x &= 12 \end{aligned}$$

*dir.*

Yukarıda verilen doğru ve ters orantı kavramlarını daha fazla terim içinde kurabiliriz.

**1.** $a, b, c$ sayıları $x, y, z$ sayıları sırası ile doğru orantılı ise

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$$

yazılır.

**2.** $a, b, c$ sayıları $x, y, z$ sayıları sırası ile ters orantılı ise

$$ax = by = cz = k \text{ veya } \frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = k$$

yazılır.

**3.** $a$ sayısı, $b$ ile doğru orantılı $c$ ile ters orantılı ise

$$\frac{ac}{b} = k$$

dır.

**Örnek 9.3.7** *a sayısı b ile doğru orantılı c ile ters orantılıdır.* $a = 4$, $b = 3$ *için* $c = 6$ *ise* $a = 6$, $b = 5$ *ise c kaçtır?*

*Çözüm:* $\frac{ac}{b} = k$ *olduğundan* $a = 4$, $b = 3$ *için* $c = 6$ *ise* $k = \frac{4.6}{3} = \frac{24}{3}$ *dir.* $a = 6$, $b = 5$ *iken* $\frac{6.c}{5} = \frac{24}{3}$ *den* $c = \frac{20}{3}$ *dür.*

**Örnek 9.3.8** *a, b ve c sayıları sırasıyla* 2, 3, 5 *sayıları ile doğru orantılı ve* $a + b + c = 150$ *ise a yı bulunuz.*

*Çözüm:* $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ *olduğundan* $2k + 3k + 5k = 150$ *den* $10k = 150$ $k = 15$ *ise* $a = 30$ *dur.*

**Örnek 9.3.9** *Un, şeker ve tuz karışımından oluşan* 420 *gram bir karışımda un, şeker ve tuz miktarı sırasıyla* 2, 3 *ile doğru orantılı 4 ile ters orantılıdır. Buna göre karışımdaki şeker miktarını bulunuz.*

*Çözüm: Karışımdaki un miktarını a, şeker miktarını b ve tuz miktarını c ile gösterelim. Buna göre* $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = 4c = k$ *ve* $a + b + c = 420$ *dır. Buradan* $a = 2k$, $b = 3k$, $c = \frac{k}{4}$ *eşitliklerini denklemde yerine yazarsak* $2k + 3k + \frac{k}{4} = 420$, $\frac{21k}{4} = 420$, $k = 80$ *dir.* $k = 80$ *için* $b = 3.80 = 240$ *gram olarak bulunur.*

## 9.4 Aritmetik Ortalama

Eldeki verilerin toplamının veri sayısına oranına aritmetik ortalama denir.

**Örnek 9.4.1** 8, 12 *ve* 16 *yaşındaki üç çocuğun yaş ortalamasını bulunuz.*
*Çözüm: Burada eldeki veriler çocukların yaşları ki toplamı* $8 + 12 + 16 = 36$ *ve 3 çocuk olduğundan veri sayısı* 3 *tür. Bu halde aritmetik ortalama (AO)*

$$AO = \frac{8 + 12 + 16}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

**Örnek 9.4.2** *4 sayının ortalaması 15 tir. Bu dört sayıya hangi sayı eklenirse ortalama 18 olur?*

*Çözüm: 4 sayının ortalaması 15 ise bu 4 sayının toplamı* $4.15 = 60$ *dır. Eklenen sayı* $x$ *olsun. Buna göre*

$$\frac{60+x}{5} = 18,\ 60+x = 90,\ x = 30$$

*olarak elde edilir.*

## Problemler

1. $A, B$ ve $C$ sayıları arasında $2A = 5B = 6C$ ilişkisi olsun. $A + B + C = 260$ ise $A$ kaçtır?

2. $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{y}{z} = 3$ ve $x + y - z = 42$ ise $y$ kaçtır?

3. $x, y, z$ pozitif sayılar ve $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ise $x, y, z$ sayılarını sıralayınız?

4. $x, y, z$ pozitif sayılar ve $\frac{x}{0,2} = \frac{y}{0,4} = z$ ise $x, y, z$ sayılarını sıralayınız?

5. İki kişi 12000 lirayı 2, 10 sayıları ile orantılı şekilde paylaşıyor ise en az para alan kaç lira almıştır.

6. Bir öğrenci üç sınavın olduğu bir dersin ilk iki sınavından aldığı notların ortalaması 30 dur. Üç sınavın ortalmasının 50 olabilmesi için üçüncü sınavdan kaç almalıdır.

7. 10 erkek ve 8 bayanın olduğu bir grupta erkelerin yaş ortalaması 32, bayanların yaş ortalaması 28 ise grubun yaş ortalamasını bulunuz.

# 10 KÜMELER ve KARTEZYEN ÇARPIM

Belli özelliklere sahip bazı şeyleri (nesne, öğe) bir arada yazmak, bir araya getirmek isteyebiliriz. İşte bu şekildeki şeyleri düzenli, anlamlı ve belli kurallar altında bir arada yazabilmek için küme kavramına ihtiyaç duyarız. Bu bölümde, kümenin tanımı ve özelliklerinin yanında, kümelerdeki işlemler verilecektir. Ayrıca, küme kavramını kullanarak bazı problemleri çözeceğiz.

## 10.1 Küme kavramı

**Tanım 10.1.1** *Belli bir özelliğe sahip nesnelerin (öğelerin) oluşturduğu topluluğa küme diyebiliriz.*

Buradaki *belli bir özellik* kavramı herkesçe aynı olan bir kavram olmalıdır. Yaşlılık, gençlik, uzunluk, güzellik gibi kavramlar tek başlarına kişiye göre değişebilen kavramlar olduğundan böyle bir özellik üzerinden küme oluşturulamaz. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

**Örnek 10.1.2** *Aşağıdaki ifadeler birer küme oluştururlar.*

**1.** *Asya kıtasındaki ülkeler.*

**2.** *Sınıfımızdaki* 15 *yaşından büyük öğrenciler.*

**3.** 3 *den büyük,* 8 *den küçük tam sayılar.*

**4.** *MSKÜ deki* 1.85 *den uzun öğrenciler.*

**Örnek 10.1.3** *"MSKÜ'deki uzun öğreciler." cümlesi bir küme oluşturmaz. Çünkü uzun öğrenciler dediğimizde bazıları için* 1.90 *dan uzun olan öğrenciler, bazıları için* 1.80 *den uzun öğrenciler vs. MSKÜ'deki uzun öğrenciler diye algılanabilir. Bu durum ise "belli bir özellik" kavramı ile çelişir.*

Küme olmak yada olmamak arasındaki farkı belirttikten sonra kümeler ile ilgili özel kavramlaru verelim.

**1.** Kümeler genellikle büyük harflerle isimlendirilir "A kümesi, B kümesi gibi".

**2.** Bir kümedeki her bir öğeye kümenin bir elemanı denir. Bir eleman kümeye bir defa yazılır. Matematiksel olarak eleman olma $\in$, eleman olmama $\notin$ ile gösterilir.

**3.** Kümeler üç şekilde gösterilir. Birincisi, liste biçimi (küme parantezi yapısı) $A = \{., ., .\}$ ikincisi Venn şeması ile yapılan gösterim ve son olarak ortak özellik gösterimidir.

**i) Liste biçimi Gösterimi**

Küme parantezi gösteriminde, kümeye ait elemanlar virgül yardımıyla birbirinden ayrılarak yazılır. Bu yazım sıradan bağımsızdır. Örneğin $A$, "3 den büyük, 8 den küçük tam sayılar" kümesi olsun. Bu ifadeye karşılık gelen küme parantezi gösterimi

$$A = \{4, 5, 6, 7\}$$

ile yazılmalıdır. Açıktır ki

5, $A$ kümesinde eleman olarak bulunduğundan bu durum: $5 \in A$ ile yazılır. Benzer şekilde $4 \in A$, $6 \in A$, $7 \in A$ yazılabilir.

2, $A$ kümesinde olmadığı için bu durum: $2 \notin A$ ile yazılır. Benzer şekilde, $9 \notin A$, $0 \notin A$ yazılabilir.

Yukarıdaki $A$ kümesini $A = \{5, 6, 7, 4\}$, $A = \{5, 4, 7, 6\}$ ile de yazabiliriz. Elemanların yerini değiştirmek kümeyi değiştirmez. Genelde sayıların oluşturduğu bir kümede sayılar sıralı yazılır.

**Örnek 10.1.4** **1.** *Doğal sayılar kümesi* $\mathbb{N}$ *ile gösterilir ve*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

*dır.*

**2.** *Tam sayılar kümesi* $\mathbb{Z}$ *ile gösterilir ve*

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

*dır.*

**3.** *Pozitif tam sayılar kümesi* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ *dir.*

*Negatif tam sayılar kümesi* $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$ *dir.*

**4.** *Çift tam sayılar kümesi* $\mathbb{Z}^{\text{Ç}} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ *dir.*

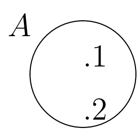
*Tek tam sayılar kümesi* $\mathbb{Z}^{T} = \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$ *dir.*

**5.** *Rasyonel sayılar kümesi* $\mathbb{Q}$*, irrasyonel sayılar kümesi* $\mathbb{I}$ *ve reel sayılar kümesi* $\mathbb{R}$ *ile gösterilir.*

**Örnek 10.1.5** $-2 \in \mathbb{Z}$, $-2 \notin \mathbb{N}$, $5 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *olduğu açıktır.*

### ii) Venn şeması

Venn şeması gösterimi tam daire olmayan (biz daire alacağız) bir şeklin içerisine elemanların yazılarak gösterildiği gösterimdir. Burada elemanlar yazılırken yanlarına nokta konulur. $A = \{1, 2\}$ kümesinin Venn şeması gösterimi




şeklinde yapılır.

### iii) Ortak özellik gösterimi

Bir $p$ özelliğini sağlayan elemanların oluşturduğu küme $A$ ise, $A$ nın elemanlarını tek tek kümeye yazmak yerine ortak özellik yöntemi ile

$$A = \{x : x \text{ bir p özelliğine sahiptir. }\}$$

yazılabilir. Burada : (bazen dik çizği) dan sonra $x$ in ne olduğu açıklanır. Örneğin $A = \{x : x \in \mathbb{N}\}$ ile yazılan kümenin doğal sayılar kümesi olduğu açıktır.

**Örnek 10.1.6** *Rasyonel sayılar kümesi* $\mathbb{Q}$ *gösterilir ve*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

*biçiminde yazılır.*

*Çift tam sayılar kümesi* $\mathbb{Z}^{\text{Ç}} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ *ile de gösterilebilir.*

*Tek tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^T = \{2n-1 : n \in \mathbb{Z}\}$ ile de gösterilebilir.*

**4.** Bir kümedeki nesnelerin (öğelerin) sayısına kümenin eleman sayısı denir. $A$ kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir.

**Örnek 10.1.7** *$A = \{a, ab, 1, elma\}$ kümesinin eleman sayısı 4 tür. Bu durum $s(A) = 4$ diye yazılır.*

**Örnek 10.1.8** *$A = \{x : -3 < x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.*

*Çözüm: $A$ kümesinin elemanlarının özelliklerine bakıldığında $-3$ den ($-3$ dahil değil) büyük 4 den (4 dahil) küçük tam sayıların oluşturduğu küme olarak belirtildiğinden*

$$A = \{x : -3 < x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

*olduğundan $s(A) = 7$ dir.*

**Örnek 10.1.9** *$X = \{x \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} < x^2 < 25\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.*

*Çözüm: $\sqrt{2} < x^2 \leq 26$ eşitsizliğini sağlayan $x$ tam sayıları $2, 3, 4$ ve $-2, -3, -4$ olduğundan*

$$X = \{x \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} < x^2 \leq 26\} = \{-2, -3, -4, 2, 3, 4\}$$

*olduğundan $s(X) = 6$ dir.*

**Örnek 10.1.10** *$B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 25\}$ kümesinin elemanlarını belirleyiniz.*

*Çözüm: $B$ kümesinin elemanları $x^2 = 25$ olacak şekildeki doğal sayıların oluşturduğu kümedir. $x^2 = 25$ ise $x = 5$ yada $x = -5$ olduğundan*

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 25\} = \{5\}$$

**Örnek 10.1.11** *$x^2 - 6x + 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

*Çözüm: $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1) = 0$ olduğundan $x = 5$, $x = 1$ olabilir. Böylece denklemin çözüm kümesi (Ç.K.) Ç.K. $= \{1, 5\}$ dir.*

## 10.2 Küme türleri

### 10.2.1 Boş küme

**Tanım 10.2.1** *Elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve* $\emptyset$ *ile gösterilir.*

**Örnek 10.2.2** $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$ *kümesinin elemanı olmadığından bir boş kümedir.*

**Örnek 10.2.3** $\{\emptyset\}$ *kümesi boş küme değildir. Çünkü boş küme, kümenin elemanıdır.*

**Örnek 10.2.4** $\{\emptyset, 1\}$ *kümesinin eleman sayısı* 2 *dir.*

### 10.2.2 Eşit kümeler

**Tanım 10.2.5** $A$ *ve* $B$ *iki küme olsun.* $A$ *daki her eleman* $B$ *de,* $B$ *deki her eleman* $A$ *da var ise* $A$ *ve* $B$ *kümelerine eşit kümeler denir ve* $A = B$ *ile gösterilir.* $A$ *da olan* $B$ *de olmayan en az bir tane eleman varsa (yada* $B$ *de olan* $A$ *da olmayan)* $A$ *ve* $B$ *ye eşit olmayan kümeler denir ve* $A \neq B$ *ile yazılır.*

**Örnek 10.2.6** $A = \{a, 1, c\}$ *kümesi ile* $B = \{1, a, c\}$ *kümesi eşit kümelerdir.*

**Örnek 10.2.7** $A = \{a, 1, c, d\}$ *kümesi ile* $B = \{1, a, c\}$ *kümesi eşit kümeler değildirler. Çünkü* $A$ *daki* $d$ *elemanı* $B$ *de yoktur.*

**Örnek 10.2.8** $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ *dir. Çünkü* $-2 \in \mathbb{Z}$ *fakat* $-2 \notin \mathbb{N}$ *dir.*

### 10.2.3 Denk kümeler

**Tanım 10.2.9** *Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir.* $A$ *ve* $B$ *denk kümeler ise* $A \equiv B$ *ile gösterilir.*

**Örnek 10.2.10** $A = \{a, 1, c, *, x\}$, $B = \{1, a, c, \heartsuit, -8\}$, $C = \{1, \clubsuit, c, ab, k\}$ *kümeleri denk kümelerdir. Çünkü* $s(A) = s(B) = s(C) = 5$ *dir.*

Örnekten açıktır ki, denk kümeler eşit küme olmayabilir. Ayrıca sonlu elemanlı eşit kümeler denk kümedirler.

### 10.2.4 Alt küme

$A$ ve $B$ iki küme olsun. $B$ deki her eleman $A$ da varsa $B$ ye $A$ nın bir alt kümesi denir ve $B \subset A$ ile gösterilir. $B$ de olan $A$ da olmayan en az bir tane eleman varsa $B$, $A$ nın alt kümesi değildir ve $B \not\subset A$ ile gösterilir. Boş küme her kümenin alt kümesidir.

**Örnek 10.2.11** *$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $B = \{1,5,6\}$, $C = \{3\}$, $D = \{-1,0,1,2,3\}$ olsun. $B$ ve $C$, $A$ nın alt kümesidir. Fakat $D$, $A$ nın bir alt kümesi değildir.*

**Örnek 10.2.12** $X = \{1,8,9\} \subset \mathbb{N}$, $B = \{-1,0,2\} \subset \mathbb{Z}$, $\{-0.25, 2, \frac{11}{2}\} \subset \mathbb{Q}$.

**Örnek 10.2.13** $X = \{-1,0,1,2\} \not\subset \mathbb{N}$ *dir. Çünkü* $-1 \notin \mathbb{N}$ *dir.*

**Örnek 10.2.14** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *olduğu açıktır.*

Tanımdan aşağıdaki özellikler verilebilir.

**i)** Her küme kendinin alt kümesidir. Yani $A \subset A$ dır.

**ii)** Boş küme her kümenin alt kümesidir. Yani $\emptyset \subset A$ dır.

**iii)** $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

**iv)** $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$ dir.

**Örnek 10.2.15** $A = \{a,b\}$ *kümesinin alt kümeleri* $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$.

$A$ kümesinin eleman sayısı $n$ ise $A$ nın alt küme sayısı $2^n$ dir. $A$ nın kendisinden farklı alt kümelerine öz alt kümeleri denir. $A$ nın öz alt küme sayısı $2^n - 1$ dir.

**Örnek 10.2.16** $A = \{-1,0,1\}$ *kümesinin eleman sayısı* 3 *olduğundan* $2^3 = 8$ *tane alt kümesi ve* 7 *tane öz alt kümesi vardır.*

**Örnek 10.2.17** 31 *tane öz alt kümesi olan bir küme kaç elemanlıdır.*
*Çözüm: Kümenin eleman sayısı $n$ olsun. Bu halde $2^n - 1 = 31$ dir.*

$$2^n = 32,\ 2^n = 2^5,\ n = 5$$

*elde edilir.*

**Örnek 10.2.18** $A = \{a, b, c\}$ *kümesinin $a$ yı içermeyen kaç tane alt kümesi vardır?*
*Çözüm: A'dan $a$ elemanın çıkarsak $\{b, c\}$ kümesinin alt küme sayısı $2^2 = 4$ dür.*

**Örnek 10.2.19** $A = \{a, b, c, d\}$ *kümesinin $b$ yi içeren kaç tane alt kümesi vardır?*
*Çözüm: A'dan $b$ elemanın çıkarsak $\{a, c, d\}$ kümesinin alt küme sayısı $2^3 = 8$ dir. $A$ kümesininde $2^4 = 16$ tane alt kümesi vardır. $A$ nın bütün alt küme sayısından $b$ yi içermeyenlerin sayısı çıkarılırsa $2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$ elde edilir.*

**Örnek 10.2.20** $A = \{a, b, c, d\}$ *kümesinin $a$ yı içeren, $b$ yi içermeyen kaç tane alt kümesi vardır?*
*Çözüm: A'dan $b$ elemanın çıkarsak $\{a, c, d\}$ kümesinin alt küme sayısı $2^3 = 8$ dir. Bu kümeden $a$ atılırsa ki $\{c, d\}$ kümesinin eleman sayısı $2$ olurki bu kümeninalt küme sayısı $2^2 = 4$ dür. $2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ dür.*

Alt küme kavramı içerisinde son olarak, bir kümenin belli sayıda eleman içeren alt küme sayısını bulma probleminden bahsedeceğiz. Öncelikle aşağıdaki basit örneği inceleyelim.

**Örnek 10.2.21** $A = \{a, b, c\}$ *kümesinin $1$ elemanlı alt kümeleri $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, $2$ elemanlı alt kümeleri $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ ve $3$ elemanlı alt kümesi kendisidir. Ayrıca boş kümede $A$ kümesinin hiç eleman içermeyen (sıfır elemanlı) alt kümesidir. Böylece $A$ kümesinin $1$ tane sıfır elemanlı, $3$ tane bir elemanlı alt kümesi, $3$ tane iki elemanlı ve $1$ tane üç elemanlı alt kümesi vardır.*

Yukarıdaki örnekte kümenin eleman sayısı az olduğu için alt kümelerini yazmak oldukça kolaydır. Fakat daha fazla eleman içeren kümeler için alt küme sayılarını bulmak bu kadar kolay olmayacaktır. Bu halde, $n$ tane eleman içerisinden $k$, $k \leq n$ tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizi aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$C\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

burada $C\binom{n}{k}$ sayısına $n$ nin $k$ lı kombinasyonu denir. Buradaki yapıyı kümelere taşıyalım. $s(A) = n$ olmak üzere $A$ kümesinin $k$ elamanlı alt küme sayısı $C\binom{n}{k}$ ile hesaplanır.

**Örnek 10.2.22** $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *kümesinin* 3 *elemanlı alt küme sayısı kaçtır?*

*Çözüm:* $C(6,3) = \dfrac{6!}{(6-3)!3!} = \dfrac{6!}{3!.3!} = \dfrac{6.5.4}{3!} = 20$

**Örnek 10.2.23** $A = \{x, 1, y, 2, z, 3\}$ *kümesinin* 3 *elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde*

1. $x$ *bulunur?*
2. $x$ *bulunur,* 1 *bulunmaz?*
3. $1, x$ *bulunur?*

*Çözüm:*

1. 3 *elemandan biri* $x$ *olduğuna göre geriye kalan* 2 *elemanı* $\{1, y, 2, z, 3\}$ *kümesinin* 2 *elemanlı alt küme sayısını bulmak yeterlidir.*

$$C(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4}{2!} = 10$$

*olarak bulunur.*

2. 3 *elemandan biri* $x$ *ve* 1 *olmayacağına göre geriye kalan* $\{y, 2, z, 3\}$ *kümesinin* 2 *elemanlı alt küme sayısının bulmak yeterlidir.*

$$C(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3}{2!} = 6$$

*dır.*

3. 3 *elemandan ikisi* $x, 1$ *olacağına göre geriye kalan bir öğe için* $\{y, 2, z, 3\}$ *kümesinin* 1 *elemanlı alt küme sayısının bulmak yeterlidir.*

$$C(4,1) = 4$$

*dür.*

$C\binom{n}{k}$ nın tanımından aşağıdaki özellikler verilebilir:

**i)** $C\binom{n}{0} = 1$, $C\binom{n}{1} = n$, $C\binom{n}{n} = 1$

**ii)** $C\binom{n}{k} = C\binom{n}{n-k}$

**iii)** $C\binom{n}{0} + C\binom{n}{1} + ... + C\binom{n}{n-1} + C\binom{n}{n} = 2^n$ dir.

**Örnek 10.2.24** *$A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, 1, 2\}$ kümeleri için $A \subset C \subset B$ şartını sağlayan 5 elemanlı kaç tane $C$ kümesi vardır?*

*Çözüm: $C$ kümesi $A$ kümesini içereceği için $A$ daki öğeler $C$ 'de de olmalıdır. Bu halde, $C$ nin üç öğesi $a, b, c$ olacağından diğer iki öğe $d, e, f, g, h, 1, 2$ den seçilmelidir. Bu seçim*

$$C(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6}{2!} = 21$$

*farklı biçimde yapılır. Böylece 21 tane $C$ kümesi vardır.*

## 10.3 Kümelerde işlemler

Hatırlanırsa, tam sayılar üzerinde işlemler tanımlamıştık. Çarpma işlemini düşünürsek, iki tam sayıyı alarak yeni bir tam sayı elde edilmişti. Örneğin, $(-2)$ ve 3 tam sayılarını çarptığımızda $(-2).3 = -6$ tam sayısı elde edilir.Kümeler üzerinde de bazı işlemler tanımlanır. İki kümeyi kullanarak bu işlemler yardımıyla yeni kümeler elde edilir. Bu bölümde kümeler üzerindeki işlemleri tanımlıyacağız. Ayrıca bu işlemleri Venn şeması yardımıyla görselleştireceğiz.

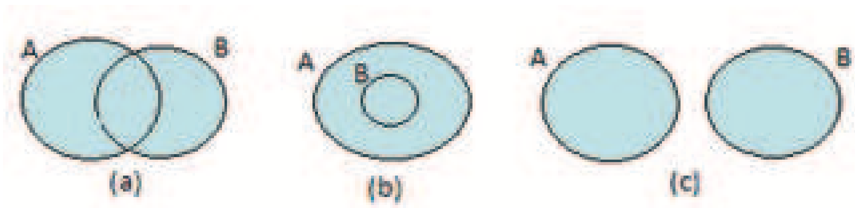
### 10.3.1 Birleşim işlemi

$A$ ve $B$ iki küme olsun. $A$ ve $B$ kümelerinin elemanlarının bir araya gelerek oluşturduğu kümeye $A$ ve $B$ nin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir. $A$ ve $B$ kümelerinde ortak elemanlar olabilir bu durumda sadece bir tanesinin birleşim kümesine yazılması gerektiğine dikkat ediniz.

**Örnek 10.3.1** *$A = \{a, b, 1, 2, x\}$ ve $B = \{0, a, 3, y, 2\}$ olsun. $A \cup B$ kümesini bulunuz.*
*Çözüm: $A \cup B = \{a, b, 1, 2, x, 0, 3, y\}$ dir.*

**Örnek 10.3.2** $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^{Ç} \cup \mathbb{Z}^T = \mathbb{Z}$




Şekil 7: $A$ ve $B$ gibi iki kümenin birleşimi ile oluşacabilecek durumlar

$\mathbb{I}$ *irrasyonel sayılar kümesini göstermek üzere* $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ *dir.*

Birleşimin liste biçiminde yazımı

$$A \cup B = \{x : \; x \in A \;\; veya \;\; x \in B\}.$$

Şekil 7 de $A$ ve $B$ gibi iki kümenin bileşimi ile oluşabilecek durumların Venn şeması gösterimleri verilmiştir.

**a)** Şekil 7 in (a) kısmında $A$ ve $B$ kümelerinin ortak elemanlarının yanında birbirlerinde olmayan elemanlarında var olduğu durum verilmiştir.

**b)** Şekil 7 in (b) kısmında $B$ kümesi aynı zamanda $A$ nın içinde vardır($A \subset B$). Bu durumda $A \cup B = A$ olduğu açıktır.

**c)** Şekil 7 in (c) kısmında $A$ ve $B$ kümelerinin hiç ortak elemanlarının olmadığı durum verilmiştir.

Birleşimin bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

**1.** $A \cup B = B \cup A$.

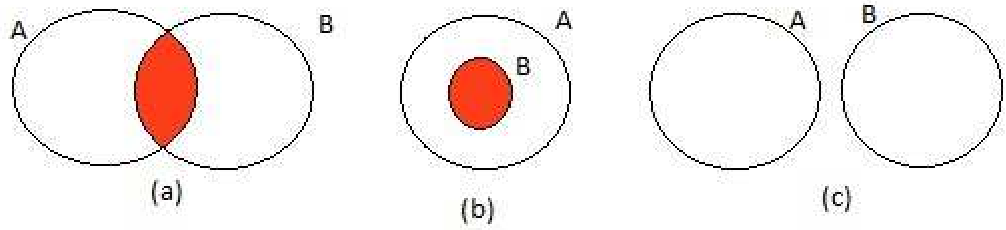
**2.** $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

**3.** $A \subset B$ ise $A \cup B = B$.

**4.** $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$.

**5.** $s(A) \leq s(A \cup B)$, $s(B) \leq s(A \cup B)$.

**6.** $A \cup B = \emptyset$ ise $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$.




Şekil 8: $A$ ve $B$ gibi iki kümenin kesişimi ile oluşacabilecek durumlar

### 10.3.2 Kesişim (arakesit) işlemi

$A$ ve $B$ iki küme olsun. $A$ ve $B$ kümelerinin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye $A$ ve $B$ nin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ ile gösterilir. $A \cap B = \emptyset$ un anlamı $A$ ve $B$ nin ortak elemanın olmadığını ifade eder. Bu tipdeki kümelere ayrık kümeler denir.

**Örnek 10.3.3** *$A = \{a, b, 1, 2, x\}$ ve $B = \{0, a, 3, y, 2\}$ olsun. $A \cup B$ kümesini bulunuz.*
*Çözüm: $A \cap B = \{a, 2\}$ dir.*

**Örnek 10.3.4** $\mathbb{Z}^{+} \cap \mathbb{Z}^{-} = \emptyset$, $\mathbb{Z}^{Ç} \cap \mathbb{Z}^{T} = \emptyset$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

Kesişimin liste biçiminde yazımı

$$A \cap B = \{x : \; x \in A \;\; ve \;\; x \in B\}.$$

Şekil 8 de $A$ ve $B$ gibi iki kümenin kesişimi ile oluşabilecek durumların Venn şeması gösterimleri verilmiştir.

**a)** Şekil 8 in (a) kısmında $A$ ve $B$ kümelerinin ortak elemanlarının olduğu görülmektedir.

**b)** Şekil 8 in (b) kısmında $B$ kümesi aynı zamanda $A$ nın içinde vardır($A \subset B$). Bu durumda $A \cap B = B$ olduğu açıktır.

**c)** Şekil 8 in (c) kısmında $A$ ve $B$ kümelerinin hiç ortak elemanlarının olmadığı durum verilmiştir. Bu durum $A \cap B = \emptyset$ ile ifade edilir.

Birleşimin bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

**1.** $A \cap B = B \cap A$.

**2.** $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

**3.** $A \subset B$ ise $A \cap B = A$.

**4.** $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$.

**5.** $s(A \cap B) \leq s(A)$, $s(A \cap B) \leq s(B)$.

İki kümenin birleşiminin eleman sayısı

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

ile verilebilir. $A \cap B$ nin eleman sayısını çıkarmazsak arakesitteki elemanları kümeye iki defa yazmış oluruz. Açıktır ki $A \cap B = \emptyset$ ise

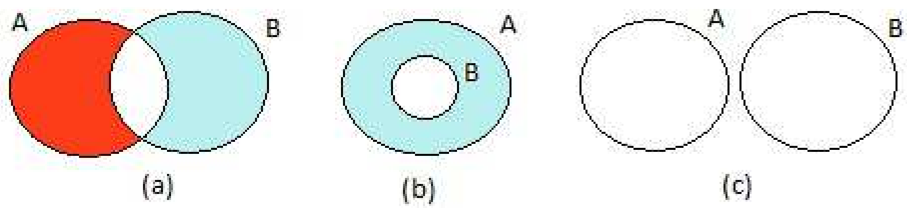
$$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$$

dir.

**Örnek 10.3.5** *$s(A) = 12$, $s(8)$ ve $s(A \cap B) = 5$ ise $s(A \cup B)$ yi bulunuz.*
*Çözüm: $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğundan $s(A \cup B) = 12 + 8 - 5 = 15$ dir.*

**Örnek 10.3.6** *Bir sınıfta öğrencilerin 18 tanesi futbol kursuna, 8 tanesi hem futbol hemde basketbol kursuna gidiyor. Sınıfın mevcudu 34 ise sadece basketbol kursuna giden kaç öğrenci vardır?*
*Çözüm: $A$ kümesi futbol kursuna gidenler, $B$ kümesi basketbol kursuna giden öğrenciler kümesi olsun. Bu halde $A \cap B$ ise hem futbol hemde basketbol kursuna gidenlerin kümesidir. Ayrıca $s(A) = 18$, $s(A \cap B) = 8$, $s(A \cup B) = 34$ dür. Burada $s(B)$ sorulmuştur.*
*$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğinden,*
*$34 = 18 + s(B) - 8$ eşitliğinden $s(B) = 24$ elde edilir. Sadece basketbol kursuna giden öğrenci sayısı $24 - 8 = 16$ dır. Dikkat edilirse $s(B)$ sadece basketbol kursuna giden ve hem basketbol hemde futbol kursuna giden öğrenci sayısını içermektedir.*

Birleşimin kesişim üzerine, kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği aşağıdaki gibidir:




Şekil 9: $A$ ve $B$ gibi iki küme için $A \backslash B$ ve $B \backslash A$ durumları

**1.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.

**2.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$.

### 10.3.3 Fark işlemi

$A$ ve $B$ iki küme olsun. $A$ da olan $B$ de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye $A$ fark $B$ kümesi denir ve $A \setminus B$ ile gösterilir.

**Örnek 10.3.7** *$A = \{a, b, 1, 2, x\}$ ve $B = \{0, a, 3, y, 2\}$ olsun. $A \setminus B$, $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.*
*Çözüm: $A \setminus B = \{b, 1, x\}$, $B \setminus A = \{0, 3, y\}$ dir.*

**Örnek 10.3.8** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^{Ç} \setminus \mathbb{Z}^T = \mathbb{Z}^{Ç}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$

Farkın liste biçiminde yazımı

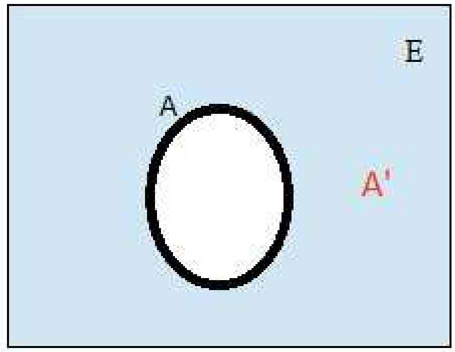
$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \ \ ve \ \ x \notin B\}.$$

Şekil 9 de $A$ ve $B$ gibi iki kümenin farkı ile oluşabilecek durumların Venn şeması gösterimleri verilmiştir.

**a)** Şekil 9 in (a) kısmında $A \backslash B$ kümesi kırmızı, $B \backslash A$ ise mavi renk ile renklendirilmiştir.

**b)** Şekil 9 in (b) kısmında $B$ kümesi aynı zamanda $A$ nın içinde vardır($A \subset B$). Bu durumda $A \backslash B$ kümesi mavi renk ile renklendirilmiştir. açıktır.

**c)** Şekil 9 in (c) kısmında $A$ ve $B$ kümelerinin hiç ortak elemanları olmadığından $A \backslash B = A$ ve $B \backslash A = B$ olduğu açıktır.




Şekil 10: $E$ evrense küme ve $A \subset E$ kümesi için $A'$ kümesi nin Venn şeması gösterilmiştir.

### 10.3.4 Bir kümenin tümleyeni

$E$ evrensel küme(belirlediğimiz herşeyi içeren küme) ve $A$ da $E$ kümesindeki bazı elemanların oluşturduğu bir küme olsun. Açıktır ki $A \subset E$ dir. $A$ da olmayan $E$ de olan elemanların oluşturuduğu kümeye $A$ nın tümleyen kümesi denir ve $A'$ veya $A^c$ ile gösterilir.

**Örnek 10.3.9** $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *ve* $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ *olsun.* $A' =?$
*Çözüm:* $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

**Örnek 10.3.10** $E = \mathbb{Z}$ *ve* $A = \mathbb{Z}^+$, $B = \mathbb{Z}^{Ç}$ *olsun. Bu durumda* $A' = \mathbb{Z}^-$, $B' = \mathbb{Z}^T$ *dir.*

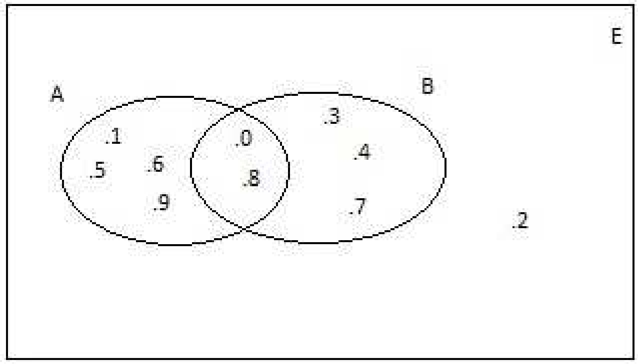
Tümleyenin liste biçiminde yazımı

$$A' = \{x : \ x \notin A \ \ ve \ \ x \in E\}.$$

Şekil 10 de $E$ evrel küme, $A \subset E$ kümesi için $A'$ kümesi nin Venn şeması gösterilmiştir.

**Örnek 10.3.11**

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve $A = \{0, 1, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{0, 3, 4, 7, 8\}$ olsun. Bu kümeleri Venn şeması yardımıyla gösterimi Şekil 11 de gösterilmiştir.




Şekil 11: Örnek 10.3.11 in çözümü

Tümleyen ile kesişim arasında önemli bir sonuç aşağıdaki gibi verilir:

$$A \backslash B = A \cap B'$$

Yukarıdaki örneği kullanarak bu sonucu doğrulayınız. De-Morgan kuralları diye bilinen tümleyen ile ilgili önemli iki özellik aşağıdaki gibidir:

**1.** $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

**2.** $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

### 10.3.5 Aralıklar

$a$ ve $b$ herhangi iki sayı ve $a < b$ olsun.

**1)** $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesine $a$-$b$ kapalı aralığı denir.

**2)** $(a, b] = \{x : a < x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesine $a$ açık $b$ kapalı aralığı denir.

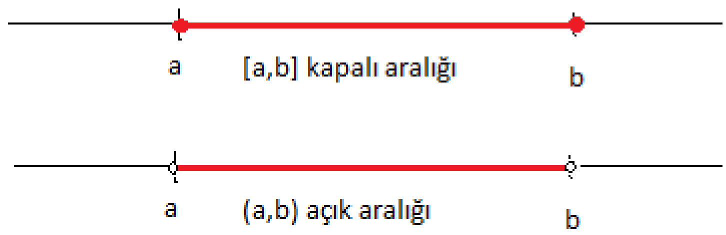
**3)** $[a, b) = \{x : a \leq x < b\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesine $a$ kapalı $b$ açık aralığı denir.

**4)** $(a, b) = \{x : a < x < b\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesine $a$-$b$ açık aralığı denir.

Ayrıca özel olarak $[a, \infty)$ ve $(-\infty, b]$ kümeleri

**5)** $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$ ve $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$

ile tanımlanır.




Şekil 12: Kapalı ve açık aralık

**Örnek 10.3.12** $A = [-1, 3)$, $B = (0, 4]$ *aralıkları verilsin. Buna göre* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ *kümelerini bulunuz?*

***Çözüm:*** $A \cup B = [-1, 4]$, $A \cap B = [0, 3)$, $A \setminus B = [-1, 0)]$

**Örnek 10.3.13** $A = [-3, 2)$ *olsun. Bu halde* $\mathbb{Z} \cap A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ *dır.*

## Problemler

1. $A = \{x : -2 < x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x : -3 \leq x \leq 3\}$ olsun. Bu durumda $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ kümelerini bulunuz. Bu kümelerin Venn şemasını çiziniz.

2. $A = \{-4, -2, 0, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12\}$ olsun. $B = \{x \in A : x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ ise $s(B)$ yi hesaplayınız.

3. $E = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{Q}' =?$

4. $A \setminus (A \setminus B)$ kümesini Venn şeması çizimi ile belirleyiniz.

5. $A \cup (B \cap C)$, $A \cup (C - B)$, $(A \cup B) \setminus (B \cap C))$ kümelerini Venn şeması çizimi ile belirleyiniz.

6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 2 yi içeren kaç tane alt kümesi vardır?

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 2 ve 4 ü içeren kaç tane alt kümesi vardır?

8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 1 i içermeyen kaç tane alt kümesi vardır?

9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 1 i ve 3 ü içermeyen kaç tane alt kümesi vardır?

10. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 1 i içeren, 3 ü içermeyen kaç tane alt kümesi vardır?

11. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 1 i ve 2 yi içeren, 3 ü içermeyen kaç tane alt kümesi vardır?

12. $A = \{Ali, elma, \heartsuit, \emptyset, 1, a\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde

    (a) $Ali$ bulunur?

    (b) 1 bulunur, $a$ bulunmaz?

    (c) $\heartsuit, a$ bulunur?

13. $A = \{Ali, elma, \heartsuit, \emptyset, 1, a\}$ kümesinin alt kümelerinden kaç tanesi $X = \{\heartsuit, a\}$ kümesini içerir?

14. $A$ ve $B$ iki küme olsun. $s(A) = 14$ ve $s(B) = 8$ ise $s(A \cup B)$ kümesinin eleman sayısı en fazla ve en az kaçtır?

15. $A$ ve $B$ iki küme olsun. $s(A \cup B) = 15$ ve $s(A) = 9$ ise $s(A \cap B)$ kümesinin eleman sayısı en fazla ve en az kaçtır?

16. $s(A \cup B) = 15$ ve $s(B \setminus A) = 8$ ise $s(A)$ yı bulunuz.

17. $E = \{a, 1, b, 3, c, 5, ali\}$ ve $A = \{a, ali, 3, c, 5\}$, $B = \{1, a, ali, c, 3\}$ olsun. Bu kümeleri Venn şeması yardımıyla gösteriniz.

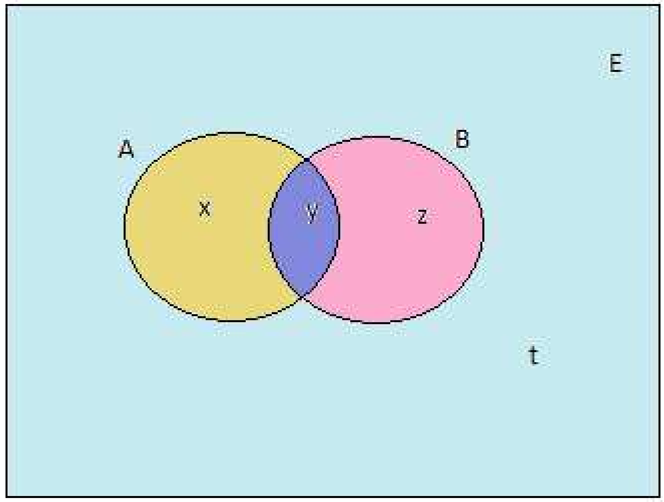
18. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere

$$A = \{3n \mid 4 \leq n \leq 7, n \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{2m + 1 \mid 3 \leq m \leq 8, m \in \mathbb{Z}\}$$

    kümeleri verilsin. $A \backslash B$, $A \cap B$ kümelerini belirleyiniz?

19. 8 elemanlı bir kümesinin en fazla 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

20. $A = [1, 3) \cup \{-1\}$ ve $E = \mathbb{R}$ ise $A$ nın tümleyen kümesini bulunuz. Reel eksende bu kümeyi gösteriniz.




Şekil 13: Kümelerle ilgili problemler için basit bir şekil

## 10.4 Kümeler yardımıyla bazı problemlerin çözümü

Voleybol ve Futbol kursuna giden öğrencilerin bulunduğu bir sınıf düşünelim. Şekil 13 de $E$ evrensel kümesi bu sınıfı göstermek üzere $A$ kümesi Voleybol kursuna giden, $B$ kümesi Futbol kursuna giden öğrencileri göstersin. $x, y, z, t$ birer doğal sayı olmak üzere Şekil 13 yardımıyla;

Hiçbir kursa gitmeyen öğrenci sayısı $t$,

Voleybol kursuna giden öğrenci sayısı $x + y$,

Futbol kursuna giden öğrenci sayısı $y + z$,

Hem Voleybol hemde Futbol kursuna giden öğrenci sayısı $y$,

Sadece Voleybol kursuna giden öğrenci sayısı $x$,

Sadece Futbol kursuna giden öğrenci sayısı $z$,

Sınıftaki öğrenci sayısı $x + y + z + t$,

dir.

**Örnek 10.4.1** *Voleybol yada Futbol kurslarından en az birine giden öğrencilerin oluşturuduğu bir sınıfta* 24 *kişi vardır. Futbol kursuna 14 kişi gittiğine göre sadece Voleybol kursuna giden öğrenci sayısını bulunuz.*

*Çözüm: Çözüm için Şekil* **??** *i kullanalım. Bu sınıfta öğrenciler Voleybol yada Futbol kurslarından en az birine gidiyor ise hiçbir kursa gitmeyen öğrenci sayısı sıfırdır. Yani* $t = 0$ *dır. Sınıf mevcudu* 24 *ise* $x+y+z+t = 24$ *dir. Futbol kursuna*

*14 kişi gittiğine göre* $y + z = 14$ *dür. Sadece Voleybol kursuna giden öğrenci sayısı olan* $x$ *sorulmaktadır. Elde eşitliklerden;*

$t = 0$ *ise* $x + y + z = 24$ *ve* $y + z = 14$ *ise*

$x + 14 = 24$, $x = 14$ *dür.*

**Örnek 10.4.2** *Sınıf mevcudu* 28 *olan bir sınıfdaki öğrenciler Voleybol ve Futbol kurslarına gitmektedir. Futbol kursuna 16 kişi ve Voleybol kursuna* 18 *gittmektedir. Bu sınıfta hiçbir kursa gitmeyen öğrenci sayısı* 2 *ise her iki kursa giden öğrenci sayısını bulunuz.*

*Çözüm: Çözüm için Şekil 13 i kullanalım. Hiçbir kursa gitmeyen öğrenci sayısı* 2 *ise* $t = 2$ *dir. Sınıf mevcudu* 28 *ise* $x + y + z + t = 28$ *dir. Futbol kursuna* 16 *kişi gittiğine göre* $y + z = 16$ *ve Voleybol kursuna* 18 *kişi gittiğine göre* $x + y = 18$ *dir. Her iki kursa giden öğrenci sayısı olan* $y$ *sorulmaktadır. Elde eşitliklerden;*

$t = 2$ *ise* $x + y + z = 26$ *dır.*

$y + z = 16$ *ise* $x = 10$ *dur.*

$x = 10$ *ise* $x + y = 18$ *olduğundan* $y = 8$ *dir.*

**Problemler**

1. Bir sınıftaki öğrenciler İngilizce ve Almanca kursunlarından en az birine gitmektedir. Sadece İngilizce kursuna giden öğrenci sayısı, sadece Almanca kursuna giden öğrenci sayısının iki katına eşittir. Her iki kursa giden öğrenci sayısı 12 ise sadece İngilizce kursuna giden kaç öğrenci vardır?

## 10.5 Kartezyen Çarpım Kümeler

**Tanım 10.5.1** $A$ *ve* $B$ *boştan farklı kümeler olmak üzere* $A$ *ve* $B$*'nin kartezyen çarpım kümesi* $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

*ile tanımlanır.*

Bu tanımdaki $(a, b)$ eleman yapısına sıralı ikili denir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere $A \times B$ kümesinin eleman yapısındaki sıralı ikililerin birinci bileşeni $A$'dan, ikinci bileşeni $B$ kümesindendir. $A \times B$ kümesi bu şekilde yazılabilecek bütün sıralı ikililerin kümesidir. Ayrıca $(a,b) = (c,d)$ ise $a = c$ ve $b = d$ dir. Yani iki sıralı ikilinin eşit olabilmesi için birinci ve ikinci bileşenlerin bir birine eşit olması gerekmektedir. $A$ yada $B$ kümelerinden en az birisi boş küme ise $A \times B = \emptyset$ dir.

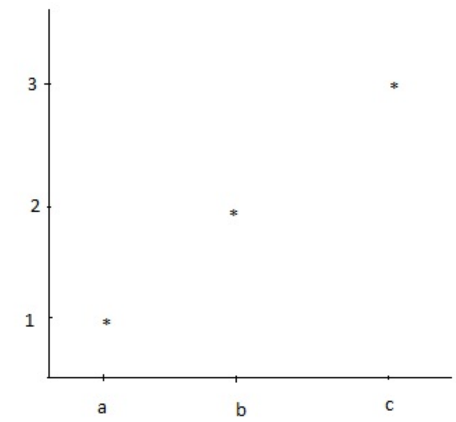
**Örnek 10.5.2** $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$ *olmak üzere* $A \times B$ *kümesini bulunuz?*

***Çözüm:*** $A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$.

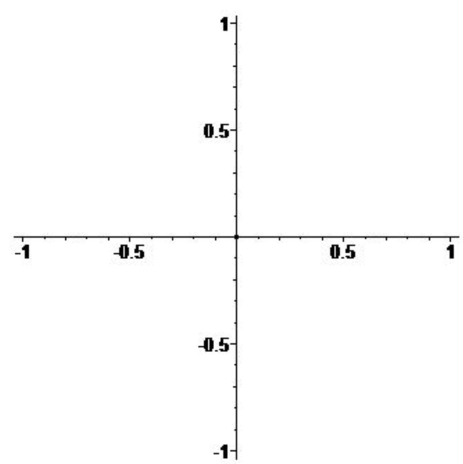
$A \times B$ kümesinin grafik gösterimi yatay eksende $A$ kümesi, dikey eksende $B$ kümesinin elemanları gösterilmek üzere $A \times B$ kümesinin elemanı olan her bir $(a,b)$ ikilinin birinci öğesi yatayda, ikinci öğesi dikeyden seçilerek (dik olacak şekilde) bu iki elemanın kesiştiği nokta olarak gösterilir. Bu şekildeki bütün $(a,b)$ ikililerinin (noktaların) gösterimine $A \times B$'nin grafiği denir. $A \times B$'nin herhangi bir alt kümesinin grafiğide bu şekilde gösterilir. Figür 14'de $\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ kümesinin grafiği verilmiştir. Biz genelde, özellikle fonksiyonlar konusunda $A = B = \mathbb{R}$ yada reel sayıların herhangi bir alt kümesinde çalışacağız. Yatay ve dikey eksenleri reel sayı ekseni olarak aldığımızda bu iki eksenin kesişim noktası 0 noktalarını üst üste gitirecek şekilde konumlandırılır ve bu noktaya orjin $(0,0)$ denir. Böylece $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (yada $\mathbb{R}^2$ düzlemi, iki boyutlu öklid uzayı) oluşturulmuş olur (Figür 15). Burada yatay eksen $x$-ekseni, dikey eksen $y$-ekseni olarak isimlendirilir. Bir $(x,y)$ ikilisi $\mathbb{R}^2$'de sadece bir noktayı ve bir nokta sadece bir tane ikili ile temsil edilir. Bir $A(a,b)$ noktasının yerini belirlerken, $x = a$ noktasından $y$ eksenine bir parelel doğru ve $y = b$ noktasından $x$-eksenine bir paralel bir doğru çizilir. Bu iki doğrunun kesiştiği nokta $A(a,b)$ noktasıdır (Figür 16).

**Örnek 10.5.3** $\mathbb{R} \times \{2\}$ *kümesini belirleyip grafiğini çiziniz.*

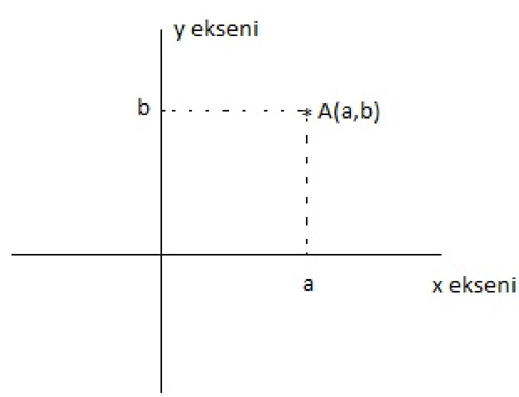
***Çözüm:*** $\mathbb{R} \times \{2\} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y = 2\} = \{(x,2) : x \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{R} \times \{2\}$ *'nin grafiği Figür 17'da verilmiştir.*



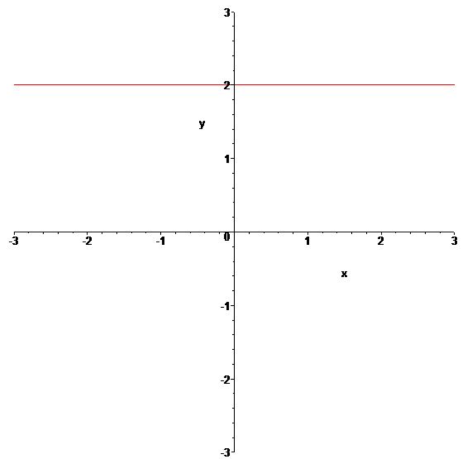

Şekil 14: $A \times B$'nin bir alt kümesinin grafiği




Şekil 15: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin grafiği ($\mathbb{R}^2$ düzlemi)




Şekil 16: $A(a, b)$ noktası




Şekil 17: $\mathbb{R} \times \{2\}$ kümesinin grafiği

$A \times B$ kümesi $B \times A$ kümesine genelde eşit değildir. $A = \{2\}$ ve $B = \{2\}$ alınırsa $A \times B = \{(2,2)\} = B \times A$'dır. Fakat $C = \{a\}$ alınırsa $A \times C = \{(2,a)\}$ ve $C \times A = \{(a,2)\}$ olduğundan $A \times C \neq C \times A$ olduğu açıktır.

**Problemler**

1. $n$ ve $m$ doğal sayılar olmak üzere $A = \{1, 2, ..., n\}$ ve $B = \{1, 2, 3, ..., m\}$ olsun. $s(A \times B) =?$

2. $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesini bulunuz ve grafiğini çiziniz.

3. $\{2\} \times \mathbb{R}$ kümesini çiziniz.

4. $\{2\} \times [-1, 1]$ kümesini çiziniz.

5. $[1, 3] \times [1, 2]$ kümesini çiziniz.

# 11 EŞİTSİZLİKLER

## 11.1 Reel Sayılar

Rasyonel sayılar ve Rasyonel olmayan sayılar (İrrasyonel sayılar) bir araya gelerek reel sayıları oluştururlar. Hatırlanırsa

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

olduğunu söylemiştik. Ayrıca $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ olduğunu görmüştük. Ayrıca iki tam sayı arasında başka bir tam sayı yoktur. Fakat $a$ ve $b$ iki rasyonel sayı olmak üzere

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

olduğundan iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane sayı vardır. Yine fakat rasyonel sayılar sayı dogrusunu dolduramazlar. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel sayılar kümesine ait değildir. Bu gibi sayılara İrrasyonel sayılar denir ve $\mathbb{I}$ ile gösterilir. Köklü sayılar, $5+\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, $e$, $\pi$,vs. sayılar da bu kümeye dahildir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

dir.

## 11.2 Eşitsizlik

Reel sayıları sıralamaya imkan veren sembollere(kurallara) eşitsizlik denir. Genel olarak bu kurallar daha önce bildiğimiz $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ dir. Buradaki eşitsizliklerin bazı temel özelliklerini aşağıdaki gibi verebiliriz:

**1)** $x < y$ ise $x \mp a < y \mp a$ dır. Yani bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenip çıkarılabilir.

**Örnek 11.2.1** **a)** *$1 < 3$ olduğu biliyoruz. Her tarafa $5$ eklersek $6 < 8$ elde edilir.*

**b)** *$x > 6$ ise $x + 7 > 13$ dür.*

**c)** *$y \geq -2$ ise $y + 4$ en az $2$ dir. Çünkü $y + 4 \geq 2$ dir.*

**2)** Bir eşitsizliğin her tarafı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılıp bölünebilir.

$x < y$ olsun. Bu halde

**a)** $a > 0$ ise $ax < ay$ veya $\dfrac{x}{a} < \dfrac{y}{a}$ dir.

**b)** $a < 0$ ise $ax > ay$ veya $\dfrac{x}{a} > \dfrac{y}{a}$ dir. Dikkat edilirse burada eşitsizlik yön değiştirmiştir.

**Örnek 11.2.2** **a)** $2 < 3$ *olduğundan her taraf* $5$ *ile çarparsak* $10 < 15$ *elde edilir.*

**b)** $-4 < -2$ *bu eşitsizliği* $-2$ *ile çarparsak* $8 > 4$ *dir.*

**c)** $-10 < -6$*,* $-2$ *ile bölünürse* $5 > 3$ *elde edilir.*

**3)** Aynı tip eşitsizlik olmak kaydıyla eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir. $x < y$ ve $a < b$ ise $x + a < y + b$ dir.

**Örnek 11.2.3** $1 \le x \le 3$ *ve* $-2 \le y \le 2$ *olsun. Buna göre* $x + y$ *nin kaç değeri tam sayıdır.*

***Çözüm:*** *Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa* $-1 \le x + y \le 5$ *olduğunda* $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *değerlerini alabilir.*

**4)** $0 < a < 1$ iken $a^n < a$, ($n > 1$ doğal sayı) özelliğide oldukça kullanışlı bir özellikdir.

**Örnek 11.2.4** **a)** $\dfrac{1}{2} < 1$ *olduğundan* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$ *dir.*

**b)** $-\dfrac{1}{3} < 1$ *olduğundan* $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} > -\dfrac{1}{3}$ *dir.*

**5)** $a$ ve $b$ pozitif sayılar ve $a > b$ olmak üzere $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

**Örnek 11.2.5** $4 > 2$ *olduğundan* $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$ *dir.*

**6)** $a, b, c, d$ pozitif sayılar $a < b$ ve $c < d$ ise $ac < bd$ dir.

**7)** Dikkat edilirse $a > b$ iken her tarafa $-b$ eklersek $a - b > 0$, her tarafa $-a$ eklersek $b - a < 0$ elde edilir.

**Örnek 11.2.6** *$x < 0 < y$ ise aşağıdakilerden hangileri doğrudur?*

**a)** $\dfrac{x-y}{x} > 1$

**b)** $x(y-x) > 0$

***Çözüm:***

**a)** $\dfrac{x-y}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$ *yazılabilir ve* $\dfrac{y}{x} < 0$ *olduğundan* $-\dfrac{y}{x} > 0$ *dir. Böylece eşitsizlik doğrudur.*

**b)** $x < 0 < y$ *iken* $y - x > 0$ *ve* $x < 0$ *dır. Bu halde* $x(y-x) < 0$ *dır. Böylece eşitsizlik yanlıştır.*

**Örnek 11.2.7** *$x > y$ ve $z < 0$ ise aşağıdakilerden hangileri daima doğrudur?*

**a)** $xz + yz > 0$

**b)** $\dfrac{x}{z} < \dfrac{y}{z}$

**c)** $xz < yz$

***Çözüm:***

**a)** *Burada* $x = -1 > -2 = y$ *ve* $z = -2$ *alınırsa* $xz + yz = 2 + 4 = 6 > 0$ *dır. Fakat* $x = 2 > 1 = y$ *ve* $z = -2$ *alınırsa* $xz + yz = -4 + (-2) = -6 < 0$ *dır. Eşitsizlik her zaman doğru değildir.*

**b)** $x = 4 > 2 = y$ *ve* $z = -2$ *alınırsa* $\dfrac{x}{z} = -2 < -1 = \dfrac{y}{z}$ *dir.* $x = -2 > -4 = y$ *ve* $z = -2$ *alınırsa* $\dfrac{x}{z} = 1 < 2 = \dfrac{y}{z}$ *dir.* $x = 2 > -2 = y$ *ve* $z = -2$ *alınırsa* $\dfrac{x}{z} = -1 < 1 = \dfrac{y}{z}$ *dir. Bu durumlar göz önüne alındığında eşitsizlik her zaman doğrudur. Ayrıca* $x > y$ *iken her tarafı* $z < 0$ *sayısına bölersek eşitsizlik yön değiştirir ve* $\dfrac{x}{z} < \dfrac{y}{z}$ *elde edilir.*

**c)** *b)'dekine benzer şekilde* $xz < yz$ *her zaman doğrudur.*

## 11.3 Birinci Dereceden Eşitsizlikler

$a$ ve $b$ bilinen sayılar, $x$ bilinmeyen sayı olmak üzere $ax+b$ biçiminde ifadeler içeren eşitsizliklere birinci dereceden eşitsizlik denir. Bu tip eşitsizliklerin çözümü birinci dereceden denklemlerin çözüm yöntemine benzemektedir.

**Örnek 11.3.1** $ax+b<c$ *eşitsizliğini çözelim.*

***Çözüm:***

$$\begin{aligned} ax+b &< c \\ ax &< c-b \\ a\ pozitif\ ise\ x &< \frac{c-b}{a} \\ a\ negatif\ ise\ x &> \frac{c-b}{a} \end{aligned}$$

**Örnek 11.3.2** $2x-6 \geq 4$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.*

***Çözüm:***

$$\begin{aligned} 2x-6 &\geq 4 \\ 2x &\geq 4+6 \\ 2x &\geq 10 \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$

*Bu eşitsizliğin çözüm kümesi aralık olarak Ç.K.* $= [5,\infty)$ *yazılabilir.*

**Örnek 11.3.3** $0 \leq 3x+6 \leq 9$ *eşitsizliğini çözelim.*

***Çözüm:*** $0 \leq 3x+6 \leq 9$ *ise* $0-6 \leq 3x \leq 9-6$ *yazılabilir. Buradan* $-6 \leq 3x \leq 3$ *elde edilir. Her taraf 3'e bölünürse çözüm* $-2 \leq x \leq 1$ *olarak elde edilir. Aralık olarak Ç.K.* $= [-2,1]$ *yazılır.*

**Örnek 11.3.4** $x+\frac{x}{2} < \frac{x-2}{4} - x + 1$ *eşitsizliğini çözünüz.*

***Çözüm:***

$$\begin{aligned} x+\frac{x}{2}-\frac{x-2}{4}+x &< 1 \\ 2x+\frac{x}{2}-\frac{x-2}{4} &< 1 \\ \frac{8x+2x-(x-2)}{4} &< 1 \\ 8x+2x-(x-2) &< 4 \\ 9x+2 &< 4 \\ 9x &< 2 \\ x &< \frac{2}{9} \end{aligned}$$

*Eşitsizliğin çözüm kümesi Ç.K.* $= (-\infty, 2/9)$.

**Örnek 11.3.5** $x-8 \leq 3x-4 \leq 2x-2$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?*

***Çözüm:*** *Böyle bir soruyu çözerken öncelikle iki kısıma ayırmak gerekir. Verilen eşitsizliği* $x-8 \leq 3x-4$ *ve* $3x-4 \leq 2x-2$ *olmak üzere iki kısma ayıralım. Bu iki eşitsizliğin çözüm kümelerini bularak her ikisinide sağlayan yani ikisinin ara kesitini bularak istenilen elde edilmiş olur.*

**a)** $x-8 \leq 3x-4$ *eşitsizliğinden* $2-8 \leq 3x-x$, $-6 \leq 2x$, $-3 \leq x$ *elde edilir. Böylece bu parçanın çözüm kümesi* $[-3, \infty)$ *aralığıdır.*

**b)** $3x-4 \leq 2x-2$ *eşitsizliğinden* $3x-2x \leq 4-2$, $x \leq 2$ *elde edilir. Böylece bu kısmın çözüm kümesi* $(-\infty, 2]$ *aralığıdır.*

***a)*** *ve* ***b)*** *eşitsizliklerinin her ikisininde sağlandığı aralık* $[-3, 2]$ *aralığıdır. Sonuç olarak eşitsizliğin çözüm kümesi* $[-3, 2]$ *aralığıdır.*

## Bölüm Problemleri

1. $a^2 < a$ ve $b > 1$ iken $ab > 0$ ve $ab > a$ eşitsizlikleri doğru mudur?

2. $a^2 < 1$ ve $x > y$ ise $ax$ ile $ay$ yi sıralayınız.

3. $x > y$, $y.z > 0$ ve $x^2 - yx > 0$ ise $xyz > 0$ doğru mudur?

4. $a > b > 1$ iken $\dfrac{a}{b-1} < 1$, $\dfrac{a-1}{b+1} > 1$ ifadelerinin doğruluğunu inceleyiniz.

5. $a, b, c$ pozitif o.ü. $2a = 3b$ ve $4b = 5c$ ise $a, b, c$ yi sıralayınız.

6. $\dfrac{a}{0,1} = \dfrac{b}{0,4} = \dfrac{c}{0,3}$ ise $a, b, c$ yi sıralayınız.

7. $0,2a = \dfrac{b}{0,4} = \dfrac{c}{0,3}$ ise $a, b, c$ yi sıralayınız.

8. $\dfrac{n+2}{7} < \dfrac{1}{3}$ eşitsizliğini sağlayan $n$ doğal sayılarının toplamı kaçtır?

9. $2x \leq 3(1-x) + x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $4x - 6 + 2(-3x) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11. $1 \leq 2x - 1 \leq 4$ eşitsizliğini çözünüz.

12. $\dfrac{2x}{3} > \dfrac{x}{2} + 1$ eşitsizliğini çözünüz.

13. $x^2 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

14. $x^2 \geq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

# 12 İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER ve EŞİTSİZLİKLER

## 12.1 Bir Bilinmeyenli İkinci Dereceden Denklemler

Bir bilinmeyenli ikinci dereceden bir denklemin en genel yapısı $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklindedir. Burada $a, b, c$ bilinen sayılar ve $x$ bilinmeyen sayıdır. Bu denklemin en genel çözüm kuralını vermeden önce iki basit durumu inceleyelim.

### 12.1.1 $b = 0$ durumu

$b = 0$ iken denklem $ax^2 = c$ halini alacaktır. Bu denklemin çözümü;

$$ax^2 = c \text{ ise } x^2 = \frac{c}{a} \text{ ve } x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

dır. Burada $x^2$ her zaman pozitif olduğundan $\dfrac{c}{a}$ nında pozitif olması gerektiğine dikkat edilmelidir. Ayrıca, $(-x)^2 = x^2$ olduğundan bu tip bir denklemin biri pozitif biri negatif iki farklı çözümü vardır.

**Örnek 12.1.1** $x^2 = 25$ *denkleminin çözümünü bulalım.*
*Çözüm:* $(-5)^2 = 25$ *ve* $5^2 = 25$ *olduğundan bu denklemin çözümü* $x = 5$ *ve* $x = -5$ *dir.*

**Örnek 12.1.2** $x^2 = 4$ *denkleminin çözümünü bulalım.*
*Çözüm:* $x^2 = 4$ *ise* $x = \sqrt{4}$ *ve* $x = -\sqrt{4}$ *dür. Buradan* $x = 2$ *ve* $x = -2$ *dir.*

**Örnek 12.1.3** $9x^2 = 16$ *denkleminin çözümünü bulalım.*
*Çözüm:* $9x^2 = 16$ *ise* $x^2 = \dfrac{16}{9}$ *dur. Buradan* $x = \pm\sqrt{\dfrac{16}{9}}$ *olduğundan denklemin çözümü* $x = \dfrac{4}{3}$ *ve* $x = -\dfrac{4}{3}$ *dür.*

**Örnek 12.1.4** $2x^2 = 5$ *denkleminin çözümünü bulalım.*
*Çözüm:* $2x^2 = 5$ *ise* $x^2 = \frac{5}{2}$ *dur. Denklemin çözümü* $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ *ve* $x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ *dür.*

### 12.1.2 $c = 0$ durumu

$c = 0$ ise denklem $ax^2 + bx = 0$ halini alır. Bu denklemin çözümleri;

$ax^2 + bx = 0$ ise $x(ax + b) = 0$ dır.

Buradan $x = 0$ veya $ax + b = 0$ dır.

Böylece denklemin çözümleri $x = 0$ ve $x = -\dfrac{b}{a}$ dır.

**Örnek 12.1.5** $x^2 + x = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $x^2 + x = 0$ *ise* $x(x + 1) = 0$ *dır. Buradan* $x = 0$ *ve* $x + 1 = 0$ *dır. Böylece denklemin çözümleri* $x = 0$ *ve* $x = -1$ *dir.*

**Örnek 12.1.6** $x^2 - 4x = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $x^2 - 4x = 0$ *ise* $x(x - 4) = 0$ *dır. Buradan* $x = 0$ *ve* $x - 4 = 0$ *dır. Böylece denklemin çözümleri* $x = 0$ *ve* $x = 4$ *dür.*

**Örnek 12.1.7** $3x^2 - 6x = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $3x^2 - 6x = 0$ *ise* $x(3x - 6) = 0$ *dır. Buradan* $x = 0$ *ve* $3x - 6 = 0$ *dır. Böylece denklemin çözümleri* $x = 0$ *ve* $x = 2$ *dir.*

**Örnek 12.1.8** $2x^2 + 3x = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $2x^2 + 3x = 0$ *ise* $x(2x + 3) = 0$ *dır. Buradan* $x = 0$ *ve* $2x + 3 = 0$ *dır. Böylece denklemin çözümleri* $x = 0$ *ve* $x = -\dfrac{3}{2}$ *dir.*

### 12.1.3 $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümü

Bu kısımda, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümlerinin varlığını inceleyip bulunuş şeklini vereceğiz. Öncelikle $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümünlerinin durumunu $a = 1$ için inceleyelim:

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$
$$(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$$
$$(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}$$

Bu halde $x + \dfrac{b}{2} = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4c}{4}} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ ve $x + \dfrac{b}{2} = -\sqrt{\dfrac{b^2 - 4c}{4}} = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ yazılabilir. Buradan

**1.** $b^2-4c>0$ ise verilen denklemin iki farklı reel sayı çözümü vardır. Bu çözümler

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \text{ ve } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

dir.

**2.** $b^2-4c=0$ ise verilen denklemin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$x=-\frac{b}{2}$$

dır.

**3.** $b^2-4c<0$ ise verilen denklemin bir reel sayı çözümü yoktur.

En genel olarak $ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözümlerin varlığı ve çözümler için yukarıdaki işlemlerin benzerleri yapılarak aşağıdaki durumlar elde edilir:

$$\Delta=b^2-4ac \text{ (}\Delta\text{ delta yada diskriminat diye okunabilir.)}$$

olmak üzere

**1.** $\Delta>0$ ise verilen denklemin iki farklı reel sayı çözümü vardır. Bu çözümler

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

dir.

**2.** $\Delta=0$ ise verilen denklemin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$x=-\frac{b}{2a}$$

dır.

**3.** $\Delta<0$ ise verilen denklemin bir reel sayı çözümü yoktur.

**Örnek 12.1.9** $x^2-2x-3=0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*
*Çözüm:* $a=1$, $b=-2$ *ve* $c=-3$ *olduğundan*

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-3)=4+12=16$$

*dır.* $\Delta=16>0$ *olduğundan denklemin iki farklı çözümü vardır. Bunlar*

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2.1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2.1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

*dür.*

**Örnek 12.1.10** $x^2 + 5x + 6 = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $a = 1$, $b = 5$ *ve* $c = 6$ *olduğundan*

$$\Delta = (5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

*dır.* $\Delta = 9 > 0$ *olduğundan denklemin iki farklı çözümü vardır. Bunlar*

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2.1} = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2.1} = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

*dir.*

**Örnek 12.1.11** $x^2 + 2x + 1 = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $a = 1$, $b = 2$ *ve* $c = 1$ *olduğundan*

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

*dır.* $\Delta = 0$ *olduğundan denklemin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm*

$$x = \frac{-2}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$$

*dir.*

**Örnek 12.1.12** $x^2 + 2x + 3 = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:* $a = 1$, $b = 2$ *ve* $c = 3$ *olduğundan*

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8$$

*dır.* $\Delta = -9 < 0$ *olduğundan denklemin reel sayı çözümü yoktur.*

**Örnek 12.1.13** $x^2 + 3x + 1 = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm:*

$$\Delta = (3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5$$

*dır.* $\Delta = 5 > 0$ *olduğundan denklemin iki farklı çözümü vardır.Bu çözümler*

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{5}}{2.1} = \frac{-9-\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-9+\sqrt{5}}{2.1} = \frac{-9+\sqrt{5}}{2}$$

*dir.*

**Örnek 12.1.14** $3(3x+1)^2 + 2(3x+1) - 1 = 0$ *denkleminin çözümünü bulalım.*

*Çözüm: Bu denklemde* $u = 3x+1$ *dönüşümü ile denklemi u bağlı ikinci dereceden bir denkleme dönüştürebiliriz. Bu dönüşüm ile denklem*

$$3u^2 + 2u - 1 = 0$$

*halini alır.* $\Delta$*'yı incelersek;*

$$\Delta = 2^2 - 4.3.(-1) = 4 + 12 = 16$$

*dır.* $\Delta = 16 > 0$ *olduğundan denklemin iki farklı çözümü vardır. Bu çözümlere* $u_1$ *ve* $u_2$ *dersek,*

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-2-\sqrt{16}}{2.3} = \frac{-2-4}{6} = -1 \\ u_2 &= \frac{-2+\sqrt{16}}{2.3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

*olmakla beraber tekrar x değişkenine dönmeliyiz. Bunun için u yerine* $u = 3x+1$ *yazarsak* $x_1$ *ve* $x_2$ *çözümleri* $3x_1 + 1 = -1$ *ve* $3x_2 + 1 = \frac{1}{3}$ *denklemlerini çözerek bulunur.* $x_1$ *çözümünü*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1 &= -1 \\ 3x_1 &= -2 \\ x_1 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

*ve* $x_2$ *çözümünü*

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= \frac{1}{3} \\ x_2 &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

*şeklinde elde edilir.*

**Örnek 12.1.15** $2^{2x} - 5.2^{x-1} + 1 = 0$ *denklemini çözünüz?*

*Çözüm: Bu problemde*

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 5.2^{x-1} + 1 &= 0 \\ (2^x)^2 - \frac{5}{2}2^x + \quad 1 &= 0 \end{aligned}$$

*olduğu için* $2^x = t$ *dönüşümü yapalım. Denklem*

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{5t}{2} + 1 &= 0 \\ 2t^2 - 5t + 2 &= 0 \end{aligned}$$

*halini alır. t'ye bağlı denklem çözülürse çözümler* $t = \frac{1}{2}$ *ve* $t = 2$ *dır. Tekrar x değişkenine dönmek için:*

$2^x = 2$ *olduğundan* $x = 1$ *ve* $2^x = \frac{1}{2}$ *olduğundan* $x = -1$ *çözümleri elde edilir. Böylece denklemim çözüm kümesi Ç.K.* $= \{-1, 1\}$ *dır.*

**Örnek 12.1.16** $\sqrt{3x+3} - x = 1$ *denklemini çözünüz?*

*Çözüm: Bu tip sorularda çözüme gidebilmek için öncelikle köklü ifadeden kurtulmamız gerekmektedir. Fakat dikkat edilmesi gereken husus köklü ifadenin tanımlı olmasıdır. Denklemi tekrardan düzenlersek*

$$\sqrt{3x+3} = x + 1$$

*ve* $3x + 3 \geq 0$ *olmak üzere, her iki tarafın karesini alırsak*

$$3x + 3 = (x+1)^2$$

$$3x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

*ve böylece* $x^2 - x - 2 = 0$ *elde edilir. Bu halde*

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

*olduğundan çözümler* $x = 2$ *veya* $x = -1$ *dir. Bu çözümlerin* $3x + 3 \geq 0$ *eşitsizliğinide gerçeklediğini gözlemleyiniz.*

**Örnek 12.1.17** $x|x-1| = 2$ *denkleminin tüm çözümlerini bulunuz?*

*Çözüm: Öncelikle mutlak değerden kurtulmamız gerekmektedir. Bunun için mutlak değerin içinin pozitif ve negatif olduğu durumları düşünmeliyiz. Mutlak değerin içi* $x = 1$ *için sıfırdır.*

$x > 1$ *olsun. Bu halde* $x|x-1| = 2$ *eşitliği* $x(x-1) = 2$ *haline dönüşür. Bu ise* $x^2-x-2 = 0$ *denklemini verir. Denklem çözürülürse* $x^2-x-2 = (x-2)(x+1) = 0$, $x = 2$ *ve* $x = -1$ *çözümleri bulunur.* $x = -1$ *in* $x > 1$ *şartını sağlamadığını gözlemleyiniz. Bu durumda çözüm* $x = 2$ *dir.*

$x < 1$ *olsun. Bu halde* $x|x-1| = 2$ *eşitliği* $-x(x-1) = 2$ *haline dönüşür. Bu ise* $x^2 - x + 2 = 0$ *denklemini verir. Elde edilen denklemi çözelim:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4.1.2 = -7 < 0$$

*olduğundan reel çözüm yoktur.*
*Sonuç olarak çözüm* $x = 2$ *dir.*

**Örnek 12.1.18** $|x||x-1| = -x^2 + 1$ *denkleminin tüm çözümlerini bulunuz?*
*Çözüm:* $|x||x-1|$ *ifadesini oluşturan her bir çarpanın işaret durumuna göre çözümleri incelemeliyiz.* $x = 0$ *ve* $x = 1$ *de ifade sıfırdır. Bu halde*

- $x < 0$ *ise* $|x||x-1| = (-x)(-x+1) = -x^2+1$ *olacaktır. Bu ise* $x^2-x = -x^2+1$ *den* $2x^2-x-1 = 0$ *eşitliğini verir.* $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4.2.(-1) = 9 > 0$ *olduğundan iki farklı kök vardır. Bu kökler*

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1+3}{4} = 1$$

  *elde edilir.* $x_2 = 1$ *çözümü* $x < 0$ *ı sağlamadığının farkında olunuz. Sonuç olarak* $x < 0$ *ise çözüm* $x_1 = -\frac{1}{2}$ *dır.*

- $x = 0$ *ise eşitlik sağlanmaz.*

- $0 < x < 1$ *ise* $|x||x-1| = (x)(-x+1) = -x^2 + 1$ *olacaktır. Buradan* $-x^2 + x = -x^2 + 1$ *den* $x = 1$ *elde edilir.* $x = 1$, $0 < x < 1$ *şartını sağlamadığı için çözüm değildir.*

- $x = 1$ *ise denklem sağlandığından* $x = 1$ *çözümdür.*

- *$x > 1$ ise $|x||x-1| = (x)(x-1) = x^2 - x$ olduğundan $x^2 - x = -x^2 + 1$ elde edilir. Bu ise $2x^2 - x - 1 = 0$ denklemini verir. $\Delta = 1 - 4.2.(-1) = 9$ olduğundan çözümler*

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

*dır. Fakat bu çözümler $x > 1$ i sağlamaz.*

*Yukarıdaki incelemelerin sonucundan verieln mutlak değerli denklemin çözüm kümesi Ç.K. $= \{-\frac{1}{2}, 1\}$ dır.*

## 12.2 Kökler Arasındaki İlişki

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin kökleri arasında bazı ilişkiler kurulabilir. $x^2+bx+c=0$ denkleminin çözümleri (kökleri) $x_1$ ve $x_2$ ise $x^2+bx+c$ polinomu $(x-x_1)$ ve $(x-x_2)$ ile bölünür. Polinomlardaki işlemlerden

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

olmalıdır. Sağ taraftaki çarpma yapılırsa

$$x^2 + bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

ve polinomların eşitliğinden

$$x_1 + x_2 = -b$$

ve

$$x_1x_2 = c$$

elde edilir.

Genel olarak, benzer bir mantıkla $ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözümleri (kökleri) $x_1$ ve $x_2$ ise

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ve

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

dır.

**Örnek 12.2.1** *$2x^2 - 3x - 4 = 0$ denklemininin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise $x_1 + x_2$ ve $x_1.x_2$ yi bulunuz?*

*Çözüm: Denklemden $a = 2$, $b = -3$ ve $c = -4$ olduğuna göre*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2$$

*dir.*

**Örnek 12.2.2** *$x^2 + mx + m - 4 = 0$ denkleminin kökleri toplamı kökler çarpımına eşit ise $m$ kaçtır?*

*Çözüm: Denklemden*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{1}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{1}$$

*olduğundan*

$$\frac{m}{1} = \frac{m-4}{1}$$

*dır. Bu eşitlik çözülürse $-m = m - 4$, $-2m = -4$, $m = 2$ olarak bulunur.*

**Örnek 12.2.3** *$x^2 - 2x + m - 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ olmak üzere kökler arasında $x_1 - 2x_2 = -4$ ilişkisi varsa $m$ değeri kaçtır?*

*Çözüm: Verilen denklemden*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$

*elde edlilir. Böylece denklemin kökleri ile ilgili*

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 = -4$$

*denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözüldüğünde $x_2 = 2$ dir. $x_2 = 2$ kök olduğu için denklemi sağlaması gerektiğinden, $2^2 - 2.2 + m - 1 = 0$ ise $m = 1$ bulunur.*

## Bölüm Problemleri

1. $x^2 - 5x + 4 = 0$ denklemini (varsa) çözünüz?

2. $3x^2 - 2x - 5 = 0$ denklemini (varsa) çözünüz?

3. $x^2 - 2mx + 5 = 0$ denkleminin bir kökü $-1$ ise $m$ kaçtır?

4. $\sqrt{x-3} - x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

5. $x^2 - mx + m - 2 = 0$ denkleminin tek bir kökü varsa $m$ hangi değerleri almalıdır?

6. $\sqrt{2x-1} - 3x = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

7. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1} = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

8. $x^2 - 3mx + m - 4 = 0$ denkleminin bir kökü diger kökünün iki katı ise $m$ yi bulunuz?

9. $x^2 + mx + m + 2 = 0$ denkleminin kökleri toplamı sıfır ise $m$ kaçtır?

## 12.3 İkinci Dereceden Eşitsizlikler

Bu bölümde $ax^2 + bx + c \geq 0$ veya $ax^2 + bx + c \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini araştıracağız. Bu ve buna benzer eşitsizlikler çözülürken işaret incelemesi yapılmalıdır. Bunun için sol taraf olabildiğince çarpanlara ayrılmalıdır. Mümkünse sol taraf $ax + b$ formundaki polinomlar cinsinden yazılmalıdır. Daha sonra sonucu veren işareti bulmak için her bir çarpanın alt aralıklardaki işaretlerinin çarpımı ile istenilen koşulu gerçekleyen aralık belirlenmelidir. Bu durumu örneklerle açıklayalım.

**Örnek 12.3.1** $x^2 - 2x \geq 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?*
*Çözüm:* $x^2 - 2x \geq 0$ *ifadesini* $x(x-2) \geq 0$ *yazabiliriz. Sonucun pozitif olması için her iki çarpanın ya pozitif yada negatif olması gerekmektedir. Bu durumları inceleyebilmek için aşağıda verilen işaret tablosunu yapmak kolaylık sağlayacaktır. Öncelikle verilen ifade* $x = 0$ *ve* $x = 2$ *de sıfırdır. Tabloda* $x$ *ve* $x-2$ *çarpanlarının işaretleri alt aralıklarda belirlenmiş ve en son satırda ise bu iki çarpanın çarpımının işareti alt aralıklarda belirlenmiştir. Tablodan elde edilenlere göre eşitsizliğin çözüm kümesi Ç.K.*

$$Ç.K. = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$$

*olarak elde edilir.*

| $x$ | $x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < 2$ | $x = 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x(x-2)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Örnek 12.3.2** $x^2 - 2x - 3 < 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?*
*Çözüm: Eşitsizliği çarpanlara ayırarak* $(x-3)(x+1) < 0$ *yazabiliriz. Her bir çarpanın işaretini* $x$ *in değerlerine göre belirleyip iki terimin çarpımının işaretini belirleyelim. Bu işlemler aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablodan çözüm kümesi*

$$Ç.K. = (-3, 1)$$

*açık aralığıdır.*

| $x$ | $x < -1$ | $x = -1$ | $-1 < x < 3$ | $x = 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - 3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x + 1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-3)(x+1)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Bu örneklerdeki mantığı daha fazla terimin çarpımı yada bölümü şeklinde ifade edilen eşitsizliklere uygulayabiliriz. Yukarıdakine benzer şekilde her bir çarpanın alt aralıklardaki işareti bulunarak verilen ifadenin alt aralıklardaki işareti belirlenir.

**Örnek 12.3.3** $(x^2 - 4)(x^2 - 3x) \leq 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?*
*Çözüm: Verilen ifade* $(x^2-4)(x^2-3x) = (x-2)(x+2)x(x-3)$ *şeklinde çarpanlara ayırabiliriz. Bu ifadenin her bir çarpanını düşündüğümüzde* $x = -2, 0, 2, 3$ *de ifade sıfırdır. İşaret tablosunu yaparsak, buna göre*

$$Ç.K. = [-2, 0] \cup [2, 3]$$

*dır.*

| $x$ | $x<-2$ | $x=-2$ | $-2<x<0$ | $x=0$ | $0<x<2$ | $x=2$ | $2<x<3$ | $x=3$ | $x>3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x^2-4)(x^2-3x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

**Örnek 12.3.4** $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?*
*Çözüm: Bu örnekte $x-1$ ve $x+1$ payda da olduğu için bu ifadeler sıfır olmamalıdır. Verilen ifade $x=-1$ ve $x=1$ de tanımsızdır. İşaret tablosu aşağıda verilmiştir. Tabloya göre çözüm kümesi*

$$Ç.K. = [-2,-1) \cup (1,+\infty)$$

*dir.*

| $x$ | $x<-2$ | $x=-2$ | $-2<x<-1$ | $x=-1$ | $-1<x<1$ | $x=1$ | $x>1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$ | $-$ | 0 | $+$ | *tanımsız* | $-$ | *tanımsız* | $+$ |

## 12.4 Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Daha önce mutlak değer kavramı ve mutlak değerli denklemler ele alınmıştı. Bu bölümde ise mutlak değerli eşitsizlikleri çalışacağız. Bu amaçla mutlak değerin eşitsizlikle ilgili özelliklerini inceleyelim.

**Özellikler:** $a, b > 0$ ve $x$ herhangi bir reel sayı olsun.

**i)** $|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$ dır. Çünkü $x > 0$ ise $|x| = x \leq a$, $x < 0$ ise $|x| = -x \leq a$ ve $x \geq -a$ dır. Böylece eşitsizlik gösterilmiş olur. Benzer şekilde diğer eşitsizliklerde gösterilebilir.

**ii)** $|x| \geq a$ ise $x \geq a$ veya $x \leq a$ dır.

**iii)** $a < |x| < b$ ise $a < x < b$ veya $a < -x < b$ dır. $a < -x < b$ eşitsizliğinin $-b < x < -a$ ile aynı olduğunu not edelim.

**Örnek 12.4.1** $|x| \leq 4$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.*

*Çözüm:* $|x| \leq 4$ *eşitsizliğinin çözüm kümesi* $-4 \leq x \leq 4$ *dür.*

**Örnek 12.4.2** $|4x - 8| \leq 4$ *eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.*

*Çözüm:* $|4x - 8| \leq 4$ *ise* $-4 \leq 4x - 8 \leq 4$ *dır. Bu halde*

$$-4 + 8 \leq 4x \leq 8 + 4$$

$$1 \leq x \leq 3$$

*elde edilir. Böylece çözüm kümesi*

$$Ç.K. = [1, 3]$$

*dır.*

**Örnek 12.4.3** $\sqrt{|2x + 5| - 1}$ *ifadesinin bir reel sayı olabilmesi için* $x$ *hangi koşulu gerçeklemelidir?*

*Çözüm:* $\sqrt{|2x + 5| - 1}$ *ifadesinin tanımlı olması için* $|2x + 5| - 1 \geq 0$ *olmalıdır. Bu ise* $|2x + 5| \geq 1$ *eşitsizliğini verir. Bu eşitsizlik* $2x + 5 \geq 1$ *ve* $2x + 5 \leq -1$ *olması durumunda mümkündür. Bu eşitsizlikleri çözersek;*

**a)** $2x + 5 \geq 1$ *ise* $2x \geq -4$ *ve* $x \geq -2$ *dir.*

**b)** $2x + 5 \leq -1$ *ise* $2x \leq -6$ *ve* $x \leq -3$ *dür.*

*Böylece* $\sqrt{|2x + 5| - 1}$ *ifadesi* $x \in (-\infty, -3] \cup [-2, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-3, -2)$ *iken bir reel sayıdır.*

## Problemler

1. $\dfrac{x+2}{x-1} \geq \dfrac{x}{x+1}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?
2. $\frac{1}{x} \leq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?
3. $(x - 3)(x + 1) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

4. $(x-1)^2(x+1) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

5. $(x+1)^2 < 7x-3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

6. $\dfrac{4x+3}{2x-1} \geq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

7. $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

8. $\dfrac{x+1}{x-2} \geq \dfrac{x-1}{x+3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

9. $|2x| \leq 8$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

10. $|x-8| > 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

11. $|x-1| + |x+1| = 2$ denklemini çözümünüz?

12. $|x-1||x+1| = 1$ denklemini çözümünüz?

13. $|x^2 - 2x| = 1$ denklemini çözümünüz?

14. $|\dfrac{x}{x+1}| \geq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

# 13 POLİNOMLAR

## 13.1 Temel Tanımlar

**Tanım 13.1.1** *$a_0$, $a_1$,..., $a_n$ reel sayılar ve $n$ bir doğal sayı olmak üzere*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

*ifadesine $n$. dereceden bir polinom denir. Buradaki $a_0$, $a_1$,..., $a_n$ reel sayılarına polinomun katsayıları, en büyük $n$ doğal sayısına polinomun derecesi denir. En büyük dereceli terimin katsayısı $a_n$'e polinomun baş katsayısı ve $a_0$'a da polinomun sabiti denir.*

Bir $P(x)$ polinomun derecesini ifade etmek için kısaca $der(P(x))$ kullanırız. $P_n(x)$ ifadesindeki $x$ bilinmeyeni göstermek üzere, $P_n$ her $x$ reel sayısını $P_n(x)$ ile bir reel sayıya karşılık getirir. Böylece polinomun bir $x$ noktasındaki değeri bulunur. Polinomları bundan sonra $P$, $Q$, $R$ gibi harflerle göstereceğiz. Bir polinom bazen yukarıdaki tanımda olduğu gibi açıkça bazende bir kaç polinomun çarpımı şeklinde yazılabilir.

**Örnek 13.1.2** *$P(x) = 2x^3 - x^2 - 6$ polinomu 3. dereceden bir polinomdur. Yani $der(P(x)) = 3$' tür. $x^3$'ün kat sayısı 2, $x^2$'nin kat sayısı $-1$, $x$'nin kat sayısı 0 ve sabit terim $-6$ dır. $x^3$'ün kat sayısı 2 olduğun bu polinomun baş kat sayısı 2 dir. Bu polinomun $x = 2$'deki değerini bulmak için polinomda $x$ yerine 2 yazmalıyız. Yani*

$$P(2) = 2.2^3 - 2^2 - 6$$

$$P(2) = 6$$

*bulunur.*

**Örnek 13.1.3** *$Q(x) = x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - (2 - \sqrt{2})$ polinomunu için $Q(\sqrt{2})$ değerini bulunuz?*

Çözüm:

$$Q(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2})$$

$$Q(\sqrt{2}) = 2 - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2})$$

$$Q(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} - 2 - 2 + \sqrt{2})$$

$$Q(\sqrt{2}) = -2$$

**Örnek 13.1.4** $Q(x) = x^{n-1} + x^{9-n}$ *ifadesinin bir polinom olması için* $n$ *ne olmalıdır?*

Çözüm: *x'in kuvvetleri birer doğal sayı olması gerektiği için* $n-1 \geq 0$ *ve* $9-n \geq 0$ *olmalıdır.* $n-1 \geq 0$ *ise* $n \geq 1$, $9-n \geq 0$ *ise* $n \leq 9$ *olduğundan* $n$, $1 \leq n \leq 9$ *şartını gerçeklemelidir.*

Tanımdan görüleceği üzere bir polinomun kat sayılarının toplamını bulmak için polinomun $x = 1$'deki değerini, polinomun sabitini belirlemek için ise polinomun $x = 0$'daki değerini bulmak yeterlidir.

**Örnek 13.1.5** $P(x) = 2x^2 - x + 3$ *polinomunun katsayılarının toplamını ve polinomun sabitini bulunuz.*

Çözüm: $P(x)$*'in kat sayıları* $2, -1, 3$ *olduğundan toplamı* $2 - 1 + 3 = 4$*'dür. Polinomun sabiti ise* $3$ *dür. Ayrıca* $P(1) = 2 - 1 + 3 = 4$ *ve* $P(0) = 3$ *ile de bu değerler bulunabilir.*

**Örnek 13.1.6** $Q(x) = (2x+1)^3(x-3)^2$ *polinomunun katsayılarının toplamını ve polinomun sabitini bulunuz.*

Çözüm: $Q(1) = (2+1)^3(1-3)^2 = 3^3.(-2)^2 = 27.4 = 108$ *ve* $Q(0) = 1^3.(-3)^2 = 9$ *olarak bulunur.*

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(x) = c$ ile verilen polinoma sabit polinom denir. $P(x) = 5$ bir sabit polinomdur. Bu polinomun her $x$ sayısı için değeri 5'tir. Örneğin $P(3) = 5$, $P(-2) = 5$'tir. Sabit polinomun derecesi 0'dır.

Polinomlardaki işlemlere geçmeden önce, iki polinomun eşitliğinden bahsetmemiz gerekmektedir.

**Tanım 13.1.7** $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ *ve* $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0$ *iki polinom olsun.* $P$ *ve* $Q$ *polinomlarının eşit olması için her* $i = 0, 1, 2, ..., n$ *için* $a_i = b_i$ *olmalıdır. Dikkat edilirse iki polinomun eşit olması için öncelikle dereceleri aynı olmalı ve aynı dereceli terimlerin katsayılarıda eşit olmalıdır.*

**Örnek 13.1.8** *$P(x) = 2x^2 - ax$ ve $Q(x) = (a-b)x^2 + 3x$ polinomları eşit ise $a.b$'nin değerini bulunuz?*

Çözüm: *$P(x) = Q(x)$ olması için $2 = a - b$ ve $-a = 3$ şartlarının gerçeklenmesi gerekmektedir. Bu şartlardan $a = -3$ ve $2 = -3 - b$, $b = -5$ bulunur. $a.b = (-3)(-5) = 15$'dir.*

## 13.2 Polinomlarda İşlemler

Polinomlarda tanımlanan toplama-çıkarma, çarpma işlemleri ile yeni polinomlar elde edilir. Bölme işlemi tam sayılarda olduğu gibi kalanlı (yada kalansız) bölme olarak karşımıza çıkar. Bu bölümde bu işlemleri tanımlayacağız.

### 13.2.1 Polinomlarda Toplama Çıkarma

Polinomlarda toplama-çıkarma yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır-çıkarılır. $P(x)$ ve $Q(x)$ gibi iki polinomun toplamı olan polinom $H(x)$ ise $H(x) = P(x) + Q(x)$ toplamının derecesi, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının derecesinin en büyük olanına eşittir. Kısaca $der(H(x)) = max(der(P(x)), der(Q(x)))$

**Örnek 13.2.1** *$P(x) = 2x^2 + 5x - 6$ ve $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ polinomları için $P(x) + Q(x)$'i bulunuz?*

Çözüm: *Toplama yapılırken sabit terimler, $x$, $x^2$ ve $x^3$'ün katsayıları kendi aralarında toplanmalıdır.*

$$P(x) + Q(x) = 2x^2 + 5x - 6 + x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

$$P(x) + Q(x) = x^3 + (2+2)x^2 + (5-3)x + (-6+5)$$

$$P(x) + Q(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$$

### 13.2.2 Polinomlarda Çarpma

Polinomlarda çarpma işlemi yapılırken çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğinden faydanılır. $P(x)$ ve $Q(x)$ gibi iki polinomun çarpımı için $der(P(x)Q(x)) = der(P(x)) + der(Q(x))$ olduğu kolayca gösterilebilir. Örneğin $P(x) = ax^2 + bx + c$ ve $Q(x) = dx + e$ polinomlarını çarpalım:

$$P(x)Q(x) = (ax^2 + bx + c)(dx + e)$$

$$P(x)Q(x) = adx^3 + (ae + bd)x^2 + (be + cd)x + ce$$

**Örnek 13.2.2** *$P(x) = 5x - 6$ ve $Q(x) = 2x^2 - 3x - 1$ polinomları için $P(x).Q(x)$'i bulunuz?*

Çözüm:

$$P(x).Q(x) = (5x - 6)(2x^2 - 3x - 1)$$

$$P(x).Q(x) = 5x(2x^2 - 3x - 1) - 6(2x^2 - 3x - 1)$$

$$P(x).Q(x) = 10x^3 - 15x^2 - 5x - 12x^2 + 18x + 6$$

$$P(x).Q(x) = 10x^3 - 27x^2 - 13x + 6$$

*Burada $der(P(x).Q(x)) = der(P(x)) + der(Q(x)) = 1 + 2 = 3$ olduğunu gözlemleyiniz.*

**Örnek 13.2.3** *$P(x) = 4x^2 - 3x$ olmak üzere $Q(x) = x^3.P(x^2)$ olsun.*

**a)** *$der(Q(x)) =?$*

**b)** *$Q(-1) =?$*

**c)** *$Q$ nun kat sayılarının toplamını bulunuz?*

Çözüm:

**a)** *$der(Q(x)) = der(x^3) + der(P(x^2))$ ve $P(x^2) = 4(x^2)^2 - 3x^2 = 4x^4 - 3x^2$ olduğundan $der(Q(x)) = 3 + 4 = 7$'dir.*

**b)** $Q(-1) = (-1)^3.P((-1)^2) = -1.P(1) = -(4 - 3) = -1$

**c)** $Q(1) = 1P(1) = 4 - 3 = 1.$

*Burada $Q(x)$'i açık olarak hesaplayarak da işlemleri yapabiliriz.*

### 13.2.3 Polinomlarda Bölme

Hatırlanırsa tam sayılarda kalanlı bölme yaparken kalan, bölenden küçük olmak zorundaydı. Burada da benzer bir durumu polinomların derecesiyle oluşturacağız. $P(x)$ bölünen polinom, $Q(x)$ bölen polinom, $R(x)$ bölüm, $K(x)$ 'de kalan polinom ve $der(K(x)) < der(Q(x))$ olmak üzere $P(x) = Q(x)R(x) + K(x)$ eşitliği sağlanacak şekilde ilgili polinomlar oluşturulmalıdır. Bu eşitlik yerine $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ eşitliğininde kullanılabileceği açıktır. Burada ayrıca $der(P(x)) \geq der(Q(x))$ olması gerektiğini gözlemleyiniz. $K(x) = 0$ ise $Q(x)$, $P(x)$'i tam bölüyor denir. Buradaki bölme işlemi aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$
\begin{array}{r|l}
\text{P(x)} & \text{Q(x)} \\ \cline{2-2}
\vdots & \text{R(x)} \\ \cline{1-1}
\multicolumn{1}{c}{K(x)} &
\end{array}
$$

Polinomlarda bölme işlemin nasıl yapılacağına dair bazı örnekler verelim.

**Örnek 13.2.4** *$P(x) = 3x + 5$ ve $Q(x) = x$ olsun.*

Çözüm: *Bölünen polinomun en büyük dereceli terimi, bölen polinomu uygun terimle çarparak (bölüme yazılır) elde etme ile başlanır. $3x$'de $x$, 3 kere olduğundan bölme aşağıdaki gibidir. Kalanın derecesi bölenden küçük olduğundan bölme işlemi biter. Böylece bölüm $x$, kalan 3'tür.*

$$
\begin{array}{r|l}
3x{+}5 & x \\ \cline{2-2}
3x & 3 \\ \cline{1-1}
\multicolumn{1}{c}{5} &
\end{array}
$$

**Örnek 13.2.5** *$x^2 - x + 5$ polinomunu $x + 2$ ile bölümünden kalanı bulalım.*

Çözüm: *Standart bölme işlemi ile kalanı aşağıdaki gibi bulabiliriz:*

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - x + 5 & x + 2 \\ \cline{2-2}
x^2 + 2x & x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x+5 & \\
-3x-6 & \\ \cline{1-1}
11 &
\end{array}
$$

*Sonuç olarak*

$$x^2 - x + 5 = (x+2)(x-3) + 11$$

*yazılabilir.*

Bir $P(x)$ polinomunun $(x - a)$ ile bölümünden kalanı bulmak için standart bölmeden başka bir yol üretebiliriz. $der(P(x)) = n$ olmak üzere $(x - a)$, $P(x)$ 'i böldüğünde

$$P(x) = (x - a)Q(x) + K$$

eşitliğini sağlayan derecesi $n - 1$ olan $Q(x)$ ve derecesi 0 (yani sabit olan) $K$ polinomları vardır. Yukarıdaki eşitlikte ($x - a = 0$ iken) $x = a$ yazarsak

$$P(a) = (a - a)Q(a) + K$$
$$P(a) = K$$

elde edilir. Yani polinomda $x = a$ yazarak $P(x)$'in $(x - a)$ ile bölümünden kalan bulunur.

**Örnek 13.2.6** *$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.*
Çözüm: *$x - 1 = 0$ iken $x = 1$'dir. $P(1) = 4 - 2 + 5 - 3 = 4$ olduğundan kalan 4'tür.*

**Sonuç 13.2.7** *Bir $P(x)$ polinomu $(x-a)$ ve $(x-b)$ ile bölünüyorsa $(x-a)(x-b)$ çarpımı ilede bölünür.*

**Örnek 13.2.8** *$P(x)$ polinomunun $(x + 2)$ ile bölümünden kalan 4, $(x - 1)$ ile bölümünden kalan $-2$ ise $P(x)$'in $(x+2)(x-1)$ ile bölümünden kalanı bulunuz?*

Çözüm: *$P(x)$ polinomunun $(x + 2)$ ile bölümünden kalan 4 ise $P(-2) = 4$, $P(x)$ polinomunun $(x - 1)$ ile bölümünden kalan $-2$ ise $P(1) = -2$'dir. Bölen polinom $(x + 2)(x - 1)$ (derece $= 2$) olduğu için $P(x)$ polinomunun $(x + 2)(x - 1)$ ile bölümünden kalan $ax + b$ formunda olmalıdır. Bu halde bölme algoritmasından aşağıdaki ifade yazılabilir:*

$$P(x) = Q(x)(x+2)(x-1) + ax + b$$

$P(-2) = 4$ *ise* $-2a + b = 4$,

$P(1) = -2$ *ise* $a + b = -2$*'dir.*

$$\begin{aligned} -2a + b &= 4 \\ a + b &= -2 \end{aligned}$$

*sistem çözülürse,* $3a = -6$, $a = -2$ *ve* $b = 0$ *oloarak bulunur. Bu halde kalan polinom* $ax + b = -2x$*'tir.*

**Örnek 13.2.9** $P(x) = x^2 - 4$ *polinomunun* $x^2 + 2$ *ile bölümünden kalanı bulunuz?*

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4 & x^2 + 2 \\ \cline{2-2} x^2 + 2 & 1 \\ \cline{1-1} -6 & \end{array}$$

*olduğundan kalan* $-6$*'dır.*

*Yukarıdaki mantığı uygularasak,* $P(x) = x^2 - 4$ *polinomunun* $x^2 + 2$ *ile bölümünden kalanı bulmak için* $P(x)$*'de,* $x^2 = -2$ *yazılırsa kalan* $-2 - 4 = -6$ *olarak bulunur.*

**Örnek 13.2.10** $P(x) = x^3 - x^2 + x - 4$ *polinomunun* $x^2 - 1$ *ile bölümünden kalanı bulunuz?*

Çözüm: $x^2 = 1$ *yazarsak,*

$$x^3 - x^2 + x - 4 = x^2.x - x^2 + x - 4 = 1.x - 1 + x - 4 = 2x - 5$$

*kalanı bulunur.*

## 13.3 Cebirin Temel Teoremi

**Tanım 13.3.1** $P(x) = 0$ *olacak biçimdeki* $x$ *sayılarına* $P(x)$*'in kökleri denir.*

**Örnek 13.3.2** $x - 4 = 0$ *denkleminin çözümünü (köklerini) bulunuz?*

Çözüm: $x = 4$ *polinomun köküdür.*

**Örnek 13.3.3** $x^3 - 4x = 0$ *denkleminin çözümünü (köklerini) bulunuz?*

Çözüm: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$ *olduğundan kökler* $-2, 0, 2$ *dir.*

**Teorem 13.3.4** *$n$. dereceden bir polinomun en fazla $n$ tane kökü vardır.*

Bu kökler sadece reel sayı olmayabilir. Bazı kökler reel sayı, bazı kökler kompleks sayı olabilir. En basit olarak $(x-1)(x^2+1)=0$ denkleminin bir reel sayı kökü ve iki tane kompleks sayı kökü vardır. Bazı kökler tekrarlı olabilir. Bu köklerin tekrar sayısı $m$ ise $m$ katlı kök denir. Örneğin, $(x-1)^2=0$ polinomu (artık denklemi) 2. derecen olduğuna göre en fazla iki tane kökü vardır. Bu kökler $x_1$ ve $x_2$ ise $(x-1)(x-1)=0$ olduğundan $x_1=1$ ve $x_2=1$'dir. Genelde $x_1=x_2=1$ ile yazarız. Bu halde, $(x-1)^2=0$ denklemi 2 katlı köke sahiptir.

**Örnek 13.3.5** *3. derecen bir polinomun 2 katlı kökü $-1$, bir diğer kökü 3 ise bu polinomu bulunuz?*

Çözüm: *Polinom $P(x)$ olsun. Bu halde 2 katlı kök $-1$ ise $P(x)$, $(x+1)^2$ ile bölünür. Ayrıca diğer kök 3 ise $x-3$ ilede bölünür. Bu halde $P(x)=(x+1)^2(x-3)$'tür.*

**Tanım 13.3.6** *$a_0$, $a_1$,..., $a_n$ tam sayılar ve $n>0$ bir doğal sayı olmak üzere*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$$

*denkleminin her bir köküne bir cebrik sayı denir. Cebrik olmayan bir sayıya ise transandan sayı denir.*

**Örnek 13.3.7** *$\sqrt{3}$ sayısı $x^2-3=0$ denkleminin kökü olduğu için bir cebrik sayıdır.*

**Örnek 13.3.8** *$\pi$ sayısı Tanım 13.3.6 'daki tanıma uygun bir denklemin çözümü olmadığı için cebrik bir sayı değildir.*

**Teorem 13.3.9** *$a_{n-1}$,..., $a_1$,$a_0$ birer tam sayı ve $a_0\neq 0$ olmak üzere*

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$$

*denkleminin bir rasyonel sayı kökü varsa bu kök bir tam sayı olmalı ve $a_0$ ı bölmelidir.*

**Örnek 13.3.10** *$p(x)=x^3+3x^2-x-3$ polinomunu çarpanlara ayıralım.*

Çözüm: $p(x) = x^3+3x^2-x-3$ *polinomu* 3. *dereceden bir polinom ve katsayıları tam sayı olduğu için bir rasyonel sayı kökü varsa bu kök* $a_0 = -3$ *sayısını bölen bir tam sayıdır.* $-3$ *ün tam sayı bölenleri* $-3, -1, 1, 3$ *olduğuna göre bu bölenlerin* $p(x) = 0$ *ı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.* $p(-3) = 0$, $p(-1) = 0$, $p(1) = 0$ *ve* $p(3) = 48$ *olduğundan* $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ *polinomunun kökleri* $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ *dir. Bu halde*

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+3)(x+1)(x-1)$$

*yazılabilir.*

**Örnek 13.3.11** $p(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$ *polinomunun köklerini bulalım.*

Çözüm: $a_0 = -1$ *in tam sayı bölenleri* $-1, 1$ *olduğu için bu değerlerin* $p(x) = 0$ *ı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.* $p(1) = 4$, $p(-1) = 0$ *olduğundan* $p(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$ *polinomunun bir kökü* $-1$ *dir. Bu halde* $p(x)$ *polinomu* $x+1$ *ile tam bölünür. Bu bölme yapılırsa*

$$p(x) = (x+1)(x^2 - 2x - 1)$$

*dir.* $x^2 - 2x - 1 = 0$ *ı çözersek;* $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4.1.(-1) = 8$ *olduğundan çözümler*

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

*olarak elde edilir. Böylece* $p(x)$ *polinomunun kökleri* $x = -1$, $x = 1-\sqrt{2}$ *ve* $x = 1+\sqrt{2}$ *dir.*

# 14 Ek Bölüm: Ölçü Birimleri

## 14.1 Zaman ölçü birimleri

Zaman ölçü birimi saattir (sa). 1 saatin 60 da birine dakika(dk) denir. Yani $60dk = 1sa$ tir. 1 dakikanın 60 da birine 1 saniye (sn) denir. Yani, $60sn = 1dk$ dır. Saatten büyük zaman ölçü birimleri de vardır.
24saat=1 gün
7gün=1 hafta
4 hafta=1 ay
1 ay=30 yada 31 gün (Şubat 28 gün 4 yılda bir 29 gündür.) Genelde 1 ay 30 gün olarak alınır.
12 ay=1 yıl
1 yıl=365 gün 6 saat (Genelde 1 yıl 365 gün olarak alınır. Bankacılık işlemlerinde 360 gündür.)
100 yıl=1 asır(yüzyıl)

**Örnek 14.1.1** *Aşağıdaki dönüşümleri yapınız.*

**1.** 1 *gün kaç dakika ve kaç saniyedir.*

**2.** 5 *yılda kaç ay, kaç gün, kaç hafta ve kaç saattir?*

## 14.2 Uzunluk ölçü birimleri

Temel uzunluk ölçü birimi metredir. Metre kısaca $m$ ile gösterilir. Uzunluk ölçüsü pozitif bir sayıdır. Uzunluk ölçüsü negatif olamaz. Temel birim olan metreden daha küçük ve daha büyük olan uzunluk ölçü birimleri vardır. Metreden küçük olan ölçü birimlerine metrenin as katları, büyük olanlara metrenin üs katları denir.

Metrenin as katları:

Desimetre (dm)

Santimetre (cm,sm)

Milimetre (mm)

Metrenin üs katları:

Dekametre (dam)

Hektometre (hm)

Kilometre (km)

Metrenin katları 10 ar 10 ar büyür, 10 ar 10 ar küçülür. 1 metrenin diğer cinslerden eşiti aşağıdaki gibidir:

$0,001$ kilometre

$0,01$ hektometre

$0,1$ dekametre

1 metre

10 desimetre

100 santimetre

1000 milimetre

Verilenlere göre, birimler arasında yukarı doğru giderken her bir basamakta 10 a bölünür, aşağıya doğru inilirken her bir basamakta 10 ile çarpılır.

**Örnek 14.2.1** 1000 *metreyi üs katları cinsinden hesaplayalım.*

*Çözüm:* $1000m = 100dam = 10hm = 1km$ *dir.*

**Örnek 14.2.2** $14m$ *metrenin as katları cinsinden hesaplıyalım.*

*Çözüm:* $14m = 140dm = 1400sm = 14000mm$ *dir.*

**Örnek 14.2.3** $1km$ *diğer cinslerden hesaplayalım.*

*Çözüm:* $1km = 10hm = 100dam = 1000m = 10000dm = 100000sm = 1000000mm$ *dir.*

**Örnek 14.2.4** *Aşağıdaki dönüşümleri bulunuz.*

**1.** $200mm$ *kaç metredir.*

**2.** *$2m$ kaç santimetre ve milimetredir.*

**3.** *$12km$ kaç metredir.*

**4.** *$4dam$ kaç desimetredir.*

**5.** *$150cm$ kaç hektometredir.*

## 14.3 Alan ölçü birimleri

Temel alan ölçü birimi metrekare dir. Kenar uzunluğu $1m$ olan bir karenin alanına $(1m).(1m) = 1m^2$ (metrekare) denir. $m.m = m^2$ olduğundan alan ölçü birimi pozitif bir sayıdır. Alan ölçü birimininde uzunluk ölçü biriminde olduğu gibi as ve üs katları vardır.

Metrekarenin as katları:

Desimetrekare ($dm^2$)

Santimetrekare ($cm^2$)

Milimetrekare ($mm^2$)

Metrekarenin üs katları:

Dekametrekare ($dam^2$)

Hektometrekare ($hm^2$)

Kilometrekare ($km^2$)

Metrekarenin katları 100 er 100 er büyür, 100 er 100 er küçülür. 1 metrekarenin diğer cinslerden eşiti aşağıdaki gibidir:

$0,000001$ kilometrekare

$0,0001$ hektometrekare

$0,01$ dekametrekare

1 metrekare

100 desimetrekare

10000 santimetrekare

1000000 milimetrekare

Verilenlere göre, birimler arasında yukarı doğru giderken her bir basamakta 100 e bölünür, aşağıya doğru inilirken her bir basamakta 100 ile çarpılır.

**Örnek 14.3.1** 10000 *metrekareyi üs katları cinsinden hesaplayalım.*
*Çözüm:* $10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2 = 0.01km^2$ *dir.*

**Örnek 14.3.2** $12m^2$ *as katları cinsinden hesaplayalım.*
*Çözüm:* $12m^2 = 1200dm^2 = 120000cm^2 = 12000000mm^2$ *dir.*

**Örnek 14.3.3** *Aşağıdaki örnekleri yapınız.*

**1.** $200mm^2$ *kaç* $m^2$*.*

**2.** $2m^2$ *kaç* $cm^2$ *ve* $mm^2$ *dir.*

**3.** $12km^2$ *kaç* $m^2$ *dir..*

**4.** $4dam^2$ *kaç* $dm^2$ *dir.*

**5.** $150cm^2$ *kaç* $hm^2$ *dir.*

## 14.4 Hacim ölçü birimleri

Temel hacim birimi $m^3$ (metreküp) tür. $1m^3$, kenarı $1m$ olan küpün hacmidir.

Metreküpün as katları:

Desimetreküp ($dm^3$)

Santimetreküp ($cm^3$)

Milimetreküp ($mm^3$)

Metreküpün üs katları:

Dekametreküp ($dam^3$)

Hektometreküp ($hm^3$)

Kilometreküp ($km^3$)

Metreküpün katları 1000 er 1000 er büyür, 1000 er 1000 er küçülür. 1 metreküpün diğer cinslerden eşiti aşağıdaki gibidir:

$10^{-9}$ kilometreküp

$10^{-6}$ hektometreküp

$10^{-3}$ dekametreküp

1 metreküp

$10^3$ desimetreküp

$10^6$ santimetreküp

$10^9$ milimetreküp

## 14.5 Sıvı ölçü birimleri

Her ne kadar hacim ölçü birimleri var olsa da sıvıların ölçülebilmesi için başka birimler kullanırız. Sıvı temel ölçü birimi $lt$ (litre) dir. $1lt = 1dm^3$ dür. Litrenin as ve üs katları vardır. Bunlar arasında geçişlerde 10 ar 10 ar büyür yada küçülür.

Litrenin as katları:

Desilitre ($dl$)

Santilitre ($cl$,$sl$)

Mililitre ($ml$)

Litrenin üs katları:

Dekalitre ($dal$)

Hektolitre ($hl$)

Kilolitre ($kl$)

1 litrenin diğer cinslerden eşiti aşağıdaki gibidir:

0, 001 kilolitre

0, 01 hektolitre

0, 1 dekalitre

1 litre

10 desilitre

100 santilitre

1000 mililitre

**Örnek 14.5.1** *$5lt$ as katları cinsinden hesaplıyalım.*

*Çözüm:* $5lt = 50dl = 500sl = 5000ml$ *dir.*

**Örnek 14.5.2** *$12000ml$ kilo litreye çevirelim.*

*Çözüm:* $12000ml = 1200sl = 120dl = 12lt = 1,2dal = 0,12hl = 0,012kl$ *dir.*

## 14.6 Kütle ölçü birimleri

Kütle, gram ile ölçülür. 1 gram, 4° derecedeki $1cm^3$ suyun kütlesidir. Gramında as ve üs katları vardır. Bunlar arasındaki geçişlerde 10 ar 10 ar büyür yada küçülür.

Gramın as katları:

Desigram ($dg$)

Santigram ($sg$, $cg$)

Miligram ($mg$)

Gramın üs katları:

Dekagram ($dag$)

Hektogram ($hg$)

Kilogram ($kg$)

1 gramın diğer cinslerden eşiti aşağıdaki gibidir:

$0,001$ kilogram

$0,01$ hektogram

$0,1$ dekagram

1 gram

10 desigram

100 santigram

1000 miligram

Ayrıca $100kg$ 1 kental, $1000kg$ 1 ton ile isimlendirilir.

**Örnek 14.6.1** *Aşağıdaki dönüşümleri bulunuz.*

**1.** 15 *ton kaç kg'dir?*

**2.** 2800 *gram kaç kilo ve kaç tondur?*

**3.** 150000 *miligram kaç gram ve kaç kilogramdır?*

## 14.7 Açı ölçü birimleri

1 Derece ($1^o$), bir çemberde merkez açının 360'da 1'ni göre açı ölçüsüne denir. ($1^o$) nin 60'da 1'ne 1 dakika ($1'$), 1''nın 60'da 1'ne 1 saniye ($1''$) denir.
Birim çemberde, yarıçpap uzunluğundaki bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 radyan denir.
Bu tanımlara göre, $360^o$ açı ölçüsü $2\pi$ radyana eşittir. Bu halde, $D$ derecelik açı ölçüsünün radyan cinsinden değeri $R$ radyan ise aralarındaki doğru orantı ile

$$2\pi D = 360R$$

yada

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

yazılabilir.

# Kaynakça


[1] A. Hançerlioğulları, F. Alan, Matematik Seti 1, Tümay Yayınları, Ankara, 2006.

[2] A. Hançerlioğulları, F. Alan, Matematik Seti 2, Tümay Yayınları, Ankara, 2007.

[3] A. Hançerlioğulları, F. Alan, Matematik Seti 3, Tümay Yayınları, Ankara, 2007.

[4] https://www.osym.gov.tr/

[5] A. Özdeğer, N. Özdeğer, Analiz Problemleri I, 3. Baskı, Tunca Kitapevi, İstanbul, 2006.

[6] G. Saban, Analize Giriş, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1976.