MATEMATİKTE KLASİK MATRİS GRUPLAR VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

DOÇ. DR. FATMA BULUT

SERÜVEN YAYINEVİ

Genel Yayın Yönetmeni / Editor in Chief • C. Cansın Selin Temana

Kapak & İç Tasarım / Cover & Interior Design • Serüven Yayınevi

Birinci Basım / First Edition • © Aralık 2024

ISBN • 978-625-5552-06-8

Serüven Yayınevi / Serüven Publishing
Türkiye Adres / Turkey Address: Kızılay Mah. Fevzi Çakmak 1. Sokak
Ümit Apt No: 22/A Çankaya/ANKARA
Telefon / Phone: 05437675765
web: www.seruvenyayinevi.com
e-mail: seruvenyayinevi@gmail.com

Baskı & Cilt / Printing & Volume
Sertifika / Certificate No: 47083

MATEMATİKTE KLASİK MATRİS GRUPLAR VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Doç. Dr. FATMA BULUT

ÖNSÖZ

Bu kitabın her aşamasında bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her zaman minnetle anacağım çok değerli hocam Prof. Dr. Salih ÇELİK'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, bugünlere gelmemdeki en büyük emeğin sahibi canım aileme sevgi ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tek yeğenim Koray'a seni çok sevdiğimi, canım annem Gülcan BULUT'a saygı ve sevgilerimi, canım babam Fikri BULUT'u ise rahmetle andığımı söylemek isterim.

Aralık, 2024

Fatma BULUT

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

∂	Kısmi türev operatörü
δ	Derivasyon operatörü
$[\,,\,]$	Lie parantezi
$\dim(G)$	G nin boyutu
$\det A$	A matrisinin determinantı
τ	Lineer tasvir
$\langle .,. \rangle$	İç çarpım
A^T	A matrisinin transpozu
A^*	A matrisinin hermityen eşleniği

GİRİŞ ve ÖZET

Klasik matris grupları [1], lineer cebir ve matematikte önemli bir yere sahip olan, çeşitli alanlarda uygulama bulan gruplardır. Klasik matrisler, matematikte ve lineer cebirde kullanılan bir veri yapısıdır ve sayıların (veya sembollerin) iki boyutlu bir tablo veya ızgara şeklinde düzenlenmesi yani dikdörtgen bir sayılar tablosu veya daha genel bir açıklamayla, toplanabilir veya çarpılabilir soyut miktarlar tablosudur. Klasik matrisler daha çok doğrusal denklemleri tanımlamak, doğrusal dönüşümlerde (lineer transformasyon) çarpanların takibi ve iki parametreye bağlı verilerin kaydedilmesi amacıyla kullanılırlar. Dizeylerin toplanabilir, çıkartılabilir, çarpılabilir, bölünebilir ve ayrıştırılabilir olmaları, doğrusal cebir ve dizey kuramının temel kavramı olmalarını sağlamıştır. Klasik matrisler, lineer denklem sistemlerini çözmek için kullanılır. Grafiklerde ve görüntü işlemede dönüşümler, ölçekleme ve rotasyon işlemleri matrislerle temsil edilir ve gerçekleştirilir. Fizikte ve mühendislikte, özellikle statik ve dinamik sistemlerin modellenmesinde ve çözümünde matrisler kullanılır. Büyük veri kümelerinin analizi ve makine öğrenimi algoritmalarında matrisler sıkça kullanılır. Bilhassa, özelliklerin ve örneklerin temsilinde klasik matrisler çok faydalıdır. Grupların yeni bir genellemesi olan klasik matris grupları, çok zengin matematiksel yapılara sahiptir ve grupların yeterli olmadığı durumlarda pek çok önemli rolleri vardır. Teoriyi çevreleyen heyecan, hem teorik hem de uygulamalı matematik ve modern teorik fizik üzerindeki etkilerinden kaynaklanmaktadır.

Bazı klasik matris grupları şunlardır:

Genel Lineer Grup (GL): Sıfır olmayan sonlu boyutlu bir vektör uzayının tüm lineer dönüşümlerini içerir.

Özel Lineer Grup (SL): Belirleyicisi determinantı 1 olan matrislerin alt grubudur ve matrislerin çarpma işlemine göre değişmeli olmayan bir gruptur.

Ortogonal Grup (O): İkinci dereceden dejenere olmayan bir vektör uzayının tüm ortogonal dönüşümlerini temsil eder. İkinci dereceden dejenere olmayan bir formda vektör uzayını koruyan dönüşümlerin grubudur.

Simplektik Grup (Sp): Dejenere olmayan alternatif iki-doğrusal bir biçime sahip vektör uzayının tüm dönüşümlerini içerir. Alternatif iki-doğrusal formda vektör uzayını koruyan dönüşümlerin grubudur.

Üniter Grup (U): Hermitiyen veya antihermitiyen bir forma sahip vektör uzayının tüm dönüşümlerini temsil eder. Hermitiyen formda vektör uzayını koruyan dönüşümlerin grubudur.

Ayrıca, kuaterniyonik matris grupları, Lie grupları da klasik matris grupları arasında yer alır ve fizik, kuantum mekaniği gibi alanlarda önemli uygulamalara sahiptir.

Matematikte klasik matris grupları, doğrusal cebirde önemli bir yer tutan ve çeşitli alanlarda uygulamaları bulunan gruplardır[2-16].

Bu kitabın amacı, matematikte lisans ve lisansüstü dersi olarak klasik matris gruplarına dair soruların çözümleri hakkında bilgi sunmaktır. Öğrenciler bu dersi aldıklarında, klasik matris gruplarını alıştırmalar ve bunların çözümleri yardımıyla öğrenmeleri hedeflenmektedir. Ayrıca öğrenciler, lineer cebirsel metodları uygulamayı, matris gruplarıyla ilgili temel özellikleri öğrenmeyi, bir matrisin üstel ve logaritmik fonksiyonlarını hesaplamayı, klasik matris grupları ve bu grupların teğet uzayları hakkında bilgi sahibi olmayı hedeflemektedirler. Öğrencilerin çalışırken örnekleri dikkatlice incelemesi, benzer örnekler oluşturması ve metin içinde yer alan soruları çözmesi, konuları daha iyi kavrayıp pekiştirmelerine yardımcı olacaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, alıştırmalar kısmında kullanılacak olan bazı önemli tanımlara yer verilmiştir[9].

Grup: K boş olmayan bir küme olmak üzere $K\text{x}K$ dan K ya tanımlı bir

$$\begin{aligned} *: K\text{x}K &\to K \\ (a,b) &\to a*b \end{aligned}$$

fonksiyonu K üzerinde bir ikili işlem olsun.

G boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir $*$ ikili işlemi için eğer aşağıdaki 4 özellik sağlanırsa $(G,*)$ sıralı ikilisine bir grup denir:

i) $*$ işlemi kapalılık özelliğini sağlar, yani $\forall a,b \in G$ için $a*b \in G$ ise

ii) $*$ işlemi birleşme özelliğini sağlar, yani

$\forall a,b,c \in G$ için

$(a*b)*c = a*(b*c) \in G$ ise

iii) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (e'ye grubun birim elemanı denir)

iv) $\forall a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde bir

$a' \in G$ varsa (a' ne a nın ters elemanı denir).

Eğer $(G,*)$ grubunda $\forall a,b \in G$ için $a * b = b * a \in G$

bu gruba değişmeli (abel) grup denir.

Lineer Dönüşümler: U ve V, K cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. Eğer, $L : U \to V$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlar ise bu dönüşüme bir lineer dönüşüm denir:

i) $\forall u_1, u_2 \in U$ için

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$$

ii) $\forall u \in U$ ve $\alpha \in K$ için $L(\alpha u) = \alpha L(u)$

V vektör uzayından K cismi içine olan bir lineer dönüşüme lineer form denir.

İç Çarpım Uzayı: W, bir K cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$\langle .,. \rangle : W \text{x} W \to K$$

Dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa bu dönüşüme W üzerinde bir iç çarpım denir ve üzerinde iç çarpım tanımlanmış bir vektör uzayına iç çarpım uzayı denilir:

i) $\forall w \in W$ için $\langle w, w \rangle \geq 0$

ii) $\forall w \in W$ için $\langle w, w \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $w = 0$ olmalıdır.

iii) $\forall w_1, w_2 \in W$ için $\langle w_1, w_2 \rangle = \overline{\langle w_2, w_1 \rangle}$.

iv) $\forall w_1, w_2 \in W$ ve $a \in K$ için $\langle aw_1, w_2 \rangle = a \langle w_1, w_2 \rangle$.

v) $\forall w_1, w_2, w_3 \in W$ için $\langle w_1, w_2 + w_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_3 \rangle$.

Hermityen İç çarpım: W, bir C kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$\langle .,. \rangle : W \text{x} W \to C$$

Dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa bu dönüşüme W üzerinde bir Hermityen iç çarpım denir ve üzerinde Hermityen iç çarpım tanımlanmış bir vektör uzayına Hermityen iç çarpım uzayı denilir:

i) $\forall w \in W$ için $\langle w, w \rangle \geq 0$

ii) $\forall w \in W$ için $\langle w, w \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $w = 0$ olmalıdır.

iii) $\forall w_1, w_2 \in W$ için $\langle w_1, w_2 \rangle = \overline{\langle w_2, w_1 \rangle}$.

iv) $\forall w_1, w_2 \in W$ ve $a \in C$ için $\langle aw_1, w_2 \rangle = a \langle w_1, w_2 \rangle$.

v) $\forall w_1, w_2 \in W$ ve $a \in C$ için $\langle w_1, aw_2 \rangle = \overline{a} \langle w_1, w_2 \rangle$.

vi) $\forall w_1, w_2, w_3 \in W$ için $\langle w_1, w_2 + w_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_3 \rangle$.

Ortonormal Küme: W, bir iç çarpım uzayı ve $w_1, w_2 \in W$ olsun. Eğer $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ ise w_1 ve w_2 birbirlerine diktir denir. Bütün vektörleri ikişer

ikişer birbirine dik olan dik küme, her vektörü birim uzunluğuna sahip olan yani normu 1 olan bir kmeye de ortonormal küme denir.

Merkez: Her G grubu için

$$C(G)=\{g\in G:\ \ \forall h\in G\ \text{ için }\ g\circ h=h\circ g\}$$

kümesi G nin bir altgrubudur. Buna G nin merkezi denir.

Homomorfizm: Her $x,y\in G$ için $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ (koruma özelliği) dir ve sadece bu şartı sağlayorsa φ ye G ve G' arasında bir (grup) homomorfizm denir.

Taban: Eğer S, V yi geren lineer bağımsız bir küme ise o halde S ye V için bir taban denilir.

Boyut: S, bir V vektör uzayının bir alt kümesi olsun. S deki herhangi bir $\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$ vektörler kümesinin $\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\ldots+\alpha_nV_n$ şeklindekibütün sonlu lineer kombinasyonların oluşturduğu kümeye S nin gerdiği uzay denir ve $Sp(S)$ ile gösterilir. Eğer $\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$, V için bir taban ise

V deki sıfır olmayan her eleman $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n$ olacak şekilde tek türlü yazılır. Eğer n sonlu bir sayı ise V ye sonlu boyutlu vektör uzayı denir $\dim(V) = n$ ile gösterilir aksi halde V sonsuz boyutludur.

Lie parantezi: *L,* bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere;

$[,]$ Lie parantezi ve

$$[x, y] = xy - yx$$

Lie çarpımı denilir.

Lie cebiri: $[,]: L \times L \to L$ bi-lineer tasviri aşağıdaki özellikleri sağlarsa; L 'ye bir Lie cebiri denir;

Her $x, y, z \in L$ ve $a, b \in K$ için;

(i) $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$

ve

$[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$ (bi-lineerlik)

(ii) $[x,y]=-[y,x]$ (anti-simetri)

(iii) $\left[x,[y,z]\right]+\left[y,[z,x]\right]+\left[z,[x,y]\right]=0$

(jacobi özdeşliği).

Simetrik Matris: Eğer bir $A=(a_{ij})$ matrisi için $A^T=A$ ise A matrisine simetrik matris denir. Eğer $A^T=-A$ ise A matrisine antisimetrik matris denir.

Hermityen Matris: Bir $A^*=(a^*_{ij})$; A nın bütün elemanlarının kompleks eşleniği alınarak elde edilmiştir ve $(A^*)^T=A$ oluyorsa A matrisine hermityen matris denir. Eğer $(A^*)^T=-A$ ise A matrisine antihermityen matris denir.

Özel Lineer Grup: Determinantı 1 olan matrisler kümesi bir grup oluşturur ve bu gruba özel lineer grup denir ve $SL(n,\kappa)$ ile gösterilir.

$$SL(n,\kappa)=\{A\in M_n(\kappa):\det A=1\}\subseteq GL(n,\kappa).$$

Ortogonal Grup: A^T matrisi A matrisinin transpozu olmak üzere, $A=(a_{ij})$ için $(A^T)_{ij}=a_{ji}$ olduğundan, $n\geq 1$ için, nxn tipindeki A reel matrisi, $A^T A=I_n$ koşulunu sağlıyorsa A matrisine ortogonal matris denilir. nxn tipindeki ortogonal grupların kümesi;

$$O(n)=\{A\in GL_n(R):\ A^T A=I_n\}\subseteq M_n(R).$$

Özel Ortogonal Grup: Determinantı 1 olan ortogonal grupların kümesi bir grup oluşturur ve bu gruba özel ortogonal grup denir ve $SO(n)$ ile gösterilir.

$$SO(n)=\{A\in GL_n(R):\ A^T A=I_n \ \text{ ve } \ \det A=1\}$$

şeklindedir. Böylece, $SO(n)$ grubu $O(n)$ nin alt uzayı olduğu görülür.

Üniter Grup: $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ için, A matrisinin hermityen eşleniği A^* olarak ifade edilir. $A^*=(\overline{A})^T=(\overline{A}^T)$ dır yani $(A^*)_{ij}=\overline{a}_{ij}$

şeklindedir. Burada $\bar{A}$, A nın kompleks eşleniğidir.

Üniter grup $U(n)$ ile gösterilir ve

$$U(n) = \{A \in GL_n(C) : \ A^* A = I_n \ \} \subseteq GL_n(C)$$

şeklinde ifade edilir.

Özel Üniter Grup: Determinantı 1 olan üniter grupların kümesi bir grup oluşturur ve bu gruba özel üniter grup denir ve $SU(n)$ ile gösterilir.

$$SU(n) = \{A \in GL_n(C) : \ A^* A = I_n \text{ ve } \det A = 1 \} \subseteq U(n)$$

şeklinde ifade edilir.

Boyut: $G \subseteq M_n(\kappa)$ matris grubunun boyutu, ona özdeşlikte teğet olan vektörlerin oluşturduğu vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır yani $\dim(G) = \dim(L)$ dir. Bir matris grubunun boyutunu bulmak için önce bu grubun teğet uzayını (taban eleman sayısı bize boyutu verir) bulmalıyız.

BÖLÜM 3

Bu bölümde, [9]'da verilen bazı alıştırmaların çözümleri verilmiştir.

ALIŞTIRMALAR ve ÇÖZÜMLERİ

Soru 1)

a) $O(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{R}): A^tA=I\}$ kümesinin bir grup olduğunu gösteriniz.

b) Eğer $A\in O(n)$ ise $detA=\pm 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm a)

$GL(n,\mathbb{R})$ bir grup olduğundan $O(n)$' in bir alt grup olduğunu gösterelim:

$I\in GL(n,\mathbb{R})$ birim matris olduğundan $I^{t=}I$ dir.O halde $I^tI=I.I=I$ dir.Dolayısıyla $I\in O(n)$ olup $O(n)\neq\emptyset$.

$A,B\in O(n)$ için $A,B^{-1}\in O(n)$ $A,B\in GL(n,\mathbb{R})$ olduğundan $GL(n,\mathbb{R})$ grup olmasından dolayı $B^{-1}\in GL(n,\mathbb{R})$ dir.

Şimdi $B^{-1}\in O(n)$ olduğunu gösterelim:

$I^{t=}I \Rightarrow (BB^{-1})^t BB^{-1} = (B^{-1})^t B^t BB^{-1} = I$

$B \in O(n)$ olduğundan $B^t B = I$ denkleminde yerine yazılırsa $(B^{-1})^t B^{-1} = I$ elde edilir. O halde $B^{-1} \in O(n)$ dir.

$(A, B^{-1})^t A, B^{-1} = (B^{-1})^t A^t AB^{-1} = I$

Dolayısıyla $A, B^{-1} \in O(n)$ bulunur.

O halde $O(n)$, $GL(n, \mathbb{R})$ in alt grubudur ve alt grup tanımı gereği gruptur.

Çözüm b)

$A, B \in O(n)$ ise;

(i) Eğer $A, B \in O(n)$ ise,

$$\begin{aligned}(AB)^t(AB) &= (B^t A^t)(AB)\\ &= (B^t(A^t A)B\\ &= B^t B\\ &= \mathrm{I}\end{aligned}$$

olup, $A, B \in O(n)$ dir.

(ii) Eğer $A \in O(n)$ ise, aşikar olarak

$$\begin{aligned}A^t A = \mathrm{I} &\Rightarrow AA^t A = A\\ &\Rightarrow AA^t = \mathrm{I}\end{aligned}$$

dır. Şimdi,

$$\begin{aligned}(A^{-1})^t(A^{-1}) &= (A^t)^{-1}A^{-1}\\ &= (AA^t)^{-1}\\ &= \mathrm{I}^{-1} = \mathrm{I}\end{aligned}$$

olduğundan, $A^{-1} \in O(n)$ dir.

$$A^tA = I \Rightarrow (detA^tA) = 1 \quad detA^tdetA = 1$$

$$(detA)^2 = 1 \Rightarrow detA = \pm 1$$

elde edilir.

Soru 2) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin **ortogonal** olması için A nın matris elemanları üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir?

Çözüm:

$$\det(A^tA) = \det(A)$$

ve eğer $A \in O(n)$ ise

$$\det(A^tA) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1.$$

Yani $\det A = \pm 1$ olur. O halde,

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin **ortogonal** olması için

$A^tA=I$ olmalıdır.

$$A^tA=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O halde

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$
$$xy=0$$
ve
$$y^2+1=1 \Rightarrow y=0$$

olmalıdır.

Soru 3) Eğer a, b ve c kareleri toplamı 1 olan üç sayı ise, $B=\begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & a-ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir **üniter** matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$B=\begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & a-ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir üniter matris

olması için $B^tB=I$ olup buradan a,b,c

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ olan üç sayı ise

$$B^t B = \begin{pmatrix} a-ib & -ic \\ -ic & a+ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & a-ib \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$

ise $B^t B = I$ şartı sağlanmış olup B matrisi bir üniter matristir.

Soru 4)

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \ a,b,c \text{ reel sayılar ve } ac \neq 0 \right\}$$

kümesinin bir **grup** oluşturup-oluşturmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \ a,b,c \text{ reel sayılar ve } ac \neq 0 \right\}$$

kümesinin bir grup olduğunu gösterelim:

$\forall a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$ ve $ac \neq 0, \quad xz \neq 0$ için,

1) Kapalılık özelliği:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ ve \ B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G \text{ olsun. O halde}$$

$$AB=\begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}$$

olur ve

$$(ax.cz)=ac.xz\neq 0$$

olduğundan o halde $AB\in G\ dir.$

Yani kapalılık özelliği sağlanır.

2) **Birleşme** özelliği sağlandığı (matrisler çarpma işlemi altında birleşme özelliğini sağladığı için) aşikardır.

3) **Birim eleman özelliği:**

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ birim elemanıdır.}$$

4) **Ters eleman özelliği:**

Eğer B, A nın tersi ise

$AB=BA=I$ olmalıdır.

($ac\neq 0$ için $a\neq 0, c\neq 0$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ax = 1$$

$$ay + bz = 0$$

$$cz = 1$$

denklemlerinden

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \in G$$

ters elemanı elde edilir.

Soru 5)

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ x\text{'in tersi mevcut ve } \theta^2 = 0 \right\}$$ kümesi

çarpma işlemi altında

a) bir grup oluşturur mu?

b) eğer öyleyse bu grup değişmeli midir? (Grek harflerin kendi arasında anti-komutatif ve latin harflerle komutatif olduğunu kabul edin.)

Çözüm a) Evet, bir grup oluşturur ve

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ x\text{'in tersi mevcut ve } \theta^2 = 0 \right\}$$

kümesinin bir grup olduğunu gösterelim:

(grek harflerin kendi arasında anti-komutatif ve latin harflerle komutatif olduğunu kabul ederek.)

1) **Kapalılık özelliği:**

Eğer $A=\begin{pmatrix} x & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix} y & \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ için

$$AB=\begin{pmatrix} xy & x\varphi+\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve şimdi

$$\left(x\varphi+\theta\right)^2 = x^2\varphi^2+2x\varphi\theta+\theta^2 = 0$$

olduğundan $AB \in H$ dir.

Yani kapalılık özelliği sağlanır.

2) **Birleşme** özelliği sağlandığı aşikardır.

3) **Birim eleman özelliği:**

$\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ birim elemanıdır.

4) **Ters eleman özelliği:**

Eğer B, A nın tersi ise

$$xy=1 \Rightarrow y=x^{-1}$$

$$x\varphi+\theta=0 \Rightarrow \varphi=-\theta x^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & -\theta x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve } (-\theta x^{-1})^2 = 0$$

olduğundan $B = A^{-1} \in H$ elde edilir.

Çözüm b)

Eğer $A = \begin{pmatrix} x & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ve* $B = \begin{pmatrix} y & \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ için

$$AB = \begin{pmatrix} xy & x\varphi + \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} yx & y\theta + \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan bu grup değişmeli değildir.

Soru 6)

$SU(2) = \{M \in U(2) : M^t + M = 0, \ \ \mathrm{tr}M = 0\}$ özel üniter grubun boyutunu bulunuz.

Çözüm:

$SU(2) = \ \{M \in U(2) : M^t + M = 0, trM = 0\}$ özel üniter grubun boyutunun 3 olduğunu gösterelim:

$u(2) = \{M \in M_2(₵) : M^+ + M = 0\}$

$u(2) = \{m \in u(2) : M^+ + M = 0, trM = 0\}$

dim $su(2) = dimSU(2)$ dir. O halde,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

alalım. Buradan

$$M^{+} + M = \begin{pmatrix} \bar{a} + a & \bar{c} + b \\ \bar{b} + c & \bar{d} + d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 + c_1 + i(b_2 - c_2) \\ b_1 + c_1 + i(c_2 - b_2) & 2d_1 \end{pmatrix}$$

yazabiliriz.

$$M^{+} + M = 0 \;\; ve \quad trM = 0 \;\; olduğundan$$

$$2a_1 = 0 \qquad 2d_1 = 0$$

$$a_1 = 0 \qquad d = -a$$

$$a + d = 0 \qquad d = -a$$

$$b_1 + c_1 + i(c_2 - b_2) = 0$$

$$b_1 + c_1 = 0 \; c_2 - b_2 = 0$$

$$b_1 = -c_1 \qquad c_2 = b_2$$

$$b = b_1 - ib_2$$

$$c = -b_1 - ib_2 = -\bar{b}.$$

$$M = \begin{pmatrix} ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & -ia_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Taban $\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim\left(SU(2)\right) = 3,$

$dim\ su(2) = 3 = \dim SU(2)$

olduğu görülür.

Soru 7) $\Gamma : M_n\left(C\right) \to M_n\left(C\right)$ tasvirinin

$$\Gamma\left(A\right) = A + A^t,$$

$\left(A^t : A'\right.$nın transpozesini gösterir$\left.\right)$ lineer olup olmadığını bulunuz?

Çözüm:

$\lambda, \mu \in C,\ \ A, B \in M_n(C)$ için

$$\begin{aligned} L(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)^t \\ &= \lambda(A + A^t) + \mu(B + B^t) \\ &= \lambda L(A) + \mu L(B) \end{aligned}$$

olup L lineerdir.

Soru 8) $G = \left\{\left(a,b\right) \in R^2 :\ a \neq 0\right\}$ kümesi üzerindeki bir ikili işlem

$$\left(a,b\right).\left(c,d\right) = \left(ac,\ ad + b\right)$$

ile veriliyor.

a) $(G,.)$ yapısı bir grup oluşturur mu?

b) Eğer öyleyse $(G,.)$ değişmeli midir?

Çözüm a)

$G = \{(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$ kümesi üzerindeki bir ikili işlem için;

i) Kapalılık özelliği:

$(a,b).(c,d) = (ac, ad + b)$ $\quad a, c \neq 0$ kapalıdır.

ii) Birleşme özelliği $(a,b).[(c,d).(e,f)] = (a,b).[(ce, cf + d)]$

$$= (ace, acf + ad + b)$$

$$= (ac, ad + b).(e,f)$$

$$= [a,b).(c,d)].(e,f)$$

olup birleşmelidir.

iii) Birim eleman özelliği:

$(a,b).(c,d) = (a,b) \Rightarrow (ac, ad + b) = (a,b)$

$c = 1, ad = 0 \ \Rightarrow a \neq 0\ , d = 0$ birimi $(1,0)\epsilon G$ elde edilir.

iv) **Ters eleman özelliği:**

$(a,b).(c,d) = (1,0) \Rightarrow (ac, ad + b) = (1,0)$

$ac = 1 \Rightarrow a = c^{-1}$ $\qquad ad + b = 0$

$(a,b)^{-1} = (c^{-1}, -c^{-1}d)$

Çözüm b)

$c^{-1}d = -b \Rightarrow b = -c^{-1}d$ değişmeli mi?

$$(a,b).(c,d) = (ac, ad + b) = (c,d)(a,b)$$
$$= (ca, cb + d)$$

$ac \neq 0\,, ca \neq 0$

$ad + b \neq cb + d$

olup değişmeli değildir.

Soru 9)

$A = \begin{pmatrix} a-ib & ic \\ ic & a+ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir üniter matris olması için a, b ve c üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir. Eğer a, b ve c, kareleri toplamı 1 olan üç sayı ise, $B = \begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & a-ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir **üniter** matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$A=\begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & a-ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir üniter matris olması için $A^t A = I$ olup buradan $a,b,c \in C$ üzerine hangi şart(lar) yüklendiğini bulalım:

$$A^t A=\begin{pmatrix} a-ib & ic \\ ic & a+ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+ib & -ic \\ -ic & a-ib \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve buradan $a^2+b^2+c^2=1$ olmalıdır.

Soru 10) $A=\begin{pmatrix} a+ib & -ic \\ -ic & a-ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir üniter matris olması için a,b ve c üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir.

Çözüm:

$A=\begin{pmatrix} a+ib & -ic \\ -ic & a-ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir üniter matris olması için $A^t A = I$ olup buradan $a,b,c \in C$ üzerine hangi şart(lar) yüklendiğini bulalım:

$$A^t A = \begin{pmatrix} a-ib & ic \\ ic & a+ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+ib & -ic \\ -ic & a-ib \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve buradan $a^2+b^2+c^2=1$ olmalıdır.

Soru 11) a) Eğer R kümesi üzerinde

$D_1 = \frac{d}{dx}$ ve $D_2 = x\frac{d}{dx}$ ise, türevlenebilen bir f fonksiyonu için D_1 ve D_2 ‘nin Lie parantezini bulun.

Çözüm a)

Türevlenebilen bir f fonksiyonu için D_1 ve D_2 nin Lie parantezi

$$[D_1, D_2](f) = D_1D_2(f) - D_2D_1(f)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right) - \left(x\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} + x\frac{d^2f}{(dx)^2} - x\frac{d^2f}{(dx)^2}$$

$$= \frac{d}{dx}(f) \qquad \Big(\text{burada} \quad D_1 = \frac{d}{dx} \text{ ve } D_2 =$$

$x\frac{d}{dx}$ olup$\Big)$

$$= D_1(f)$$

b) Eğer R üzerinde

$D_1 = x\frac{d}{dx}$ ve $D_2 = x^3\frac{d}{dx}$ ise, türevlenebilen bir f fonksiyonu için D_1 ve D_2 nin Lie parantezini bulunuz.

Çözüm b)

Türevlenebilen bir f fonksiyonu için D_1 ve D_2 nin Lie parantezi

$$[D_1, D_2](f) = D_1D_2(f) - D_2D_1(f)$$

$$= x\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{df}{dx}\right) - (x^3\frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right))$$

$$= x(3x^2\frac{df}{dx} + x^3\frac{d^2f}{(dx)^2}) - x^3(\frac{df}{dx} + x\frac{d^2f}{(dx)^2})$$

$$= 3x^3\frac{df}{dx} + x^4\frac{d^2f}{(dx)^2} - x^3\frac{df}{dx} - x^4\frac{d^2f}{(dx)^2}$$

$$= 2x^3\frac{d}{dx}(f)$$

$\Big(burada\ \ D_1 = x\frac{d}{dx}$ ve $D_2 = x^3\frac{d}{dx}$ olup$\Big)$

$$= 2D_2(f)$$

elde edilir.

Soru 12) Eğer *T*, bir ortogonal tasvir ise, her $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$< T(\vec{x}), T(\vec{x}) > \;=\; < \vec{x}, \vec{x} >$$

oldugunu gösteriniz.

Çözüm:

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ve $T \in O_{R^n}$ ise

$$\begin{aligned} \langle x+y, x-y \rangle &= \langle T(x+y), T(x-y) \rangle \\ &= \langle T(x)+T(y), T(x)-T(y) \rangle \\ &= \langle T(x), T(x) \rangle - \langle T(y), T(y) \rangle, \end{aligned}$$

$\vec{y} = \vec{0}$ alırsak T bir lineer tasvir olduğundan

$$< T(\vec{x}), T(\vec{x}) > \;=\; < \vec{x}, \vec{x} >$$

elde edilir.

Soru 13) $U(1,1)$ pseudo-üniter grubunun genel bir elemanını belirleyiniz.

Çözüm:

$U(1,1)$ pseudo-üniter grubunun genel bir elemanını belirleyelim:

$$U(1,1)=\left\{A\in M_2(C)\ \ A^*I_{1,1}A\ \ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in U\left(1,1\right)\ olsun$$

$$A^tI_{1,1}A=I_{1,1}\ \ den\ \ A^tI_{1,1}=I_{1,1}A^{-1}\ olup$$

$$\begin{pmatrix}a^* & c^*\\ b^* & d^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\det A\right)^{-1}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\ dan$$

$$a^*=\frac{d}{\det A}\ \ ;b^*=\frac{c}{\det A}$$

$$a^*=(\det A).\begin{pmatrix}a & b\\ b^* & a^*\end{pmatrix}\ olur$$

$$\left|\det A\right|=1\ olduğundan\ \ U(1,1)\ in\ genel\ bir\ elemanı$$

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b^* & a^*\end{pmatrix}=aa^*-bb^*=1\ \text{şeklindedir.}$$

Soru 14) $SU\left(2\right)$ özel üniter grubunun merkezini bulunuz.

Çözüm:

$SU\left(2\right)$ özel üniter grubu:

$SU(2)=\left\{A\in\cup(2):A^{+}A=I\ \ \text{ve}\ \ \det=1\right\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ seçersek bu matrisin eşlenik transpozu ise $A^{+}=\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix}$ olur. O halde,

$A^{+}A=I$ ise

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a\overline{a}+c\overline{c}=1$$

$$b\overline{b}+d\overline{d}=1$$

$$\overline{a}b+\overline{c}d=0$$

$$\overline{a}b+\overline{c}d=0=a\overline{b}+\overline{c}b$$

ve buradan $c=-b^{*},\ \ d=a^{*}$ bulunur.

$$\det A=1\Rightarrow ad-bc=1$$

$$\Rightarrow aa^{*}+bb^{*}=1$$

$$\Rightarrow |a|^{2}+|b|^{2}=1$$

elde ederiz. $SU(2)$ nun genel elemanı $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^{*} & a^{*}\end{pmatrix}$ ve $\det A=1$ olup merkezin elemanı $(C(SU(2)))$ nin de elemanı olmalıdır:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b^{*} & a^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ -d^{*} & c^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ -d^{*} & c^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b^{*} & a^{*}\end{pmatrix}$$

ve

$|a|^2 + |b|^2 = 1$ ve $|c|^2 + |d|^2 = 1$ elde edilir.

$$ac - bd^* = ca - db^*$$
$$bd^* = db^*$$
$$bb^* = |b|^2 = 1$$
$$b = 1 \text{ için } \; d = d^*$$
$$b = \sqrt{-1} \text{ için } \; -d = d^*$$

olup $d = 0$ bulunur.

$$-b^* c = -c^* b^* \Rightarrow c = c^* \in \mathbb{R}$$
$$|e|^2 + |d|^2 = 1 \Rightarrow d = 0,$$
$$|e|^2 = 1 \text{ ve } c \in \mathbb{R} \Rightarrow c = \pm 1.$$

$SU(2)$ özel üniter grubunun merkezi $C(SU(2))$ ile gösterilmek üzere

$$C(SU(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Soru 15) $O(3)$ ortogonal grubunun **teğet uzayı**nı (ve dolayısıyla **boyut**unu) tespit ediniz.

Çözüm:

$O(3) = \{A \epsilon \; GL(3, \mathbb{R}); \; A^t - A = I\}$

O(n)' ye göre teğet olan uzay bütün antisimetrik matrislerin uzayı yani;

$$O(3) = \{M\epsilon(\mathbb{R}); M + M^t = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} \text{olsun.}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+d & c+g \\ d+b & 2e & f+h \\ g+c & f+h & 2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 & \qquad b = -d \\ e = 0 & \qquad c = -g \\ j = 0 & \qquad f = -h \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buradan

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

O halde, $\{\{H, X, Y\}$ kümesi $(O(3)$ uzayı gerer ve lineer bağımsızdır. Dolayısıyla boyutu $dim\ O(3) = 3$ olur.

Soru 16) $L : M_n(C) \to M_n(C)$, $L(\mathrm{A}) = \mathrm{A} - \mathrm{A}^t$ tasvirinin lineer olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} &\lambda, \mu \in C, \quad A, B \in M_n(C) \quad \text{için} \\ &L(\lambda A + \mu B) = (\lambda A + \mu B) - (\lambda A + \mu B)^t \\ &\qquad\qquad\quad = \lambda(A - A^t) + \mu(B - B^t) \\ &\qquad\qquad\quad = \lambda L(A) + \mu L(B) \end{aligned}$$

olup L lineerdir.

Soru 17) $f : M_n(C) \to M_n(C)$, $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^t$ tasvirinin anti-homomorfizm olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$A, B \in M_n(C)$ olsun.

$f(A.B) = f(B).f(A)$ *ise* f anti-homomorfizmadir.

$$f(AB) = (AB)^t = B^t A^t = f(B)f(A)$$

olup bu tasvir anti-homomorfizmdir.

Soru 18) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ matrisinin **ortogonal** olması için, matris elemanları üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir?

Çözüm:

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ matrisinin **ortogonal** olması için $A^t A = I$ olmalıdır.

$$A^t A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O halde $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$xy = 0$ ve $y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y = 0$

$$z^2 = 1 \text{ ise } z = \pm 1$$

elde edilir.

Soru 19) Eğer *a,b* ve *c*, kosinüs kuralını gerçekliyorsa, $B = \begin{pmatrix} a-ib & ic \\ ic & a+ib \end{pmatrix}$ matrisinin bir **üniter** matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Kosinüs Kuralı, "bir üçgenin bir kenarının karesi, diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir, bu iki kenarın çarpımının iki katı ve aralarındaki açının kosinüsü çıkarılır" şeklinde tanımlanır. Eğer *a,b* ve *c*, kosinüs kuralını gerçekliyorsa,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

eşitliği sağlanır. Bunu kullanarak B matrisi üniterdir Gerçekten;

$$B = \begin{pmatrix} a-ib & -ic \\ ic & a+ib \end{pmatrix}.$$

$$B^tB = \begin{pmatrix} a+ib & -ic \\ ic & a-ib \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a-ib & -ic \\ ic & a+ib \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & -aic+bc-ica+b \\ ica+bc+ica+bc & c^2+a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soru 20)

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ a,b \text{ reel sayılar ve } a \neq 0 \right\}$$

kümesinin bir **grup** oluşturup- oluşturmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ a,b \text{ reel sayılar ve } a \neq 0 \right\}$$

kümesinin bir grup olduğunu gösterelim:

$\forall a,b,x,y \in R$ ve $a \neq 0,\ \ x \neq 0$ için,

1) **Kapalılık özelliği:**

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $ve\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ olsun. O halde

$$AB = \begin{pmatrix} ax & ay+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$ax \neq 0$ olduğundan $AB \in G\ dir$.

Yani kapalılık özelliği sağlanır.

2) **Birleşme** özelliği sağlandığı (matrisler çarpma işlemi altında birleşme özelliğini sağladığı için) aşikardır.

3) **Birim eleman özelliği:**

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ birim elemanıdır.}$$

4) **Ters eleman özelliği:**

Eğer B, A nın tersi ise

$AB = BA = I$ olmalıdır.
$(ax \neq 0$ için $a \neq 0, x \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mathrm{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ax & ay+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow ax = 1 \text{ ve } ay + b = 0$$

denklemlerinden

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \in G$$

ters elemanı elde edilir.

Soru 21)

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix}\theta & \varphi\\ 0 & 1\end{pmatrix}:\ \theta^2=0=\varphi^2,\quad \theta.\varphi+\varphi.\theta=0\right\}$$

bir grup olup-olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$A=\begin{pmatrix}\theta_1 & \varphi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix}\theta_2 & \varphi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ olsun.

$\theta_1^2=0=\varphi_1^2$ $\theta_2^2=0=\varphi_2^2$

$\theta_1\varphi_1=-\varphi_1\theta_1$ ise $\theta_2\varphi_2=-\varphi_2\theta_2$

a) Kapalılık özelliği:

$$A.B=\begin{pmatrix}\theta_1 & \varphi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\theta_2 & \varphi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_1\theta_2 & \theta_1\varphi_2+\varphi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$=(\theta_1\theta_2)^2=0$

$(\theta_1\varphi_2+\varphi_1)^2 \overset{?}{=} 0$

$\theta_1^2\theta_2^2+\theta_1^2+\theta_1(\varphi_2\varphi_1)\neq 0$

Kapalı değildir ve grup oluşturmaz.

Soru 22) *A,* kompleks sayılar kümesi üzerinde bir cebir ve $\delta : A \to A$, bir lineer tasvir olsun. Eğer

her $x, y \in A$ için $\delta(x.y) = \delta(x).y + x.\delta(y)$ ise, δ ya bir derivasyon denir. Buna göre:

a) İki derivasyonun bileşkesi bir derivasyon mudur?

b) İki derivasyonun Lie parantezini bulunuz.

Çözüm a)

$$\delta(x, y) = \delta(x).y + x.\delta(y)$$
$$\beta(x, y) = \beta(x).y + x\beta(y)$$
$$\beta(\delta(x, y)) = \beta(\delta(x).y + x.\delta(y)) \text{ olsun.}$$

δ ve β lineer oldukları için

$$\beta(\delta(x, y)) = \beta(\delta(x).y) + \beta(x.\delta(y)) \text{ yazılabilir.}$$

$$\beta(\delta(x, y)) = \beta(\delta(x)).y + \delta(x).\beta(y)$$
$$+ \beta(x).\delta y) + x.\beta(\delta(y))$$
$$f(x) = x \ ve \ f(y) = y \text{ alınırsa}$$
$$\beta(f(x, y)) = \beta(x).y + x.\beta(y) + \beta(x).y + x.\beta(y)$$
$$\beta(\delta(x, y)) = 2(\beta(x).y + x.\beta(y)) \ olur.$$

İki derivasyon bileşkesi bir derivasyondur.

Çözüm b)

Lie parantezi için:

$$
\begin{aligned}
[\delta,\delta'](xy) &= (\delta\circ\delta' - \delta'\circ\delta)(xy)\\
&= (\delta\circ\delta')(x)y + x(\delta\circ\delta')(y) - (\delta'\circ\delta)(x)y - x(\delta'\circ\delta)(y)\\
&= (\delta\circ\delta' - \delta'\circ\delta)(x)y + x(\delta\circ\delta')(x)y\\
&= [\delta,\delta'](x)y + x[\delta,\delta'](y)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Soru 23) R^2 üzerinde aşikar olmayan iki Lie cebiri bulunuz.

Çözüm:

R^2 nin tabanı $\{x,y\}$ olsun, bu taktirde Lie cebiri için $[x,x]=0=[y,y]=0,[x,y]=-[y,x]$ olmalıdır.

$[x,y]=ax+by$ diyelim. Bu taktirde, örneğin

$$
\begin{aligned}
[x,[x,y]] &= [x,ax+by]\\
&= a[x,x]+b[x,y]\\
&= a.0+b(ax+by)
\end{aligned}
$$

olup

$$[x,[x,y]]+[x,[y,x]]+[y,[x,x]]=0$$

şeklinde jakobi özdeşliğine göre

$b(ax+by)-b(ax+by)=0$.

O halde a ve b üzerine yüklenecek şart yoktur

ve eğer $a = 0 = b$ alırsak, trivial lie cebirini elde ederiz ve örneğin

$a = 1, b = 0; a = 0, b = 1$

için $[x, x] = 0 = [y, y], \quad [x, y] = x$

ve $[x, x] = 0 = [y, y], \quad [x, y] = y$

birer aşikar olmayan Lie cebiridir.

Soru 24) $SO(3)$ grubunun teğet uzayını (ve dolayısıyla boyutunu) belirleyiniz.

Çözüm:

$SO(3) = \left\{ A \in M_3(R) : A^t . A = \mathrm{I}, \ \det A = 1 \right\}$

özel ortogonal grubunun teğet uzayı:

$$SO(3)=\left\{M\in M_3(R): M^t+M=0,\ trM=0\right\}.$$

$\lambda_i,\ 1\leq i\leq 9$ için,

$$M=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6\\ \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9\end{pmatrix}\quad M^t=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_4 & \lambda_7\\ \lambda_2 & \lambda_5 & \lambda_8\\ \lambda_3 & \lambda_6 & \lambda_9\end{pmatrix}$$

$$M+M^t=\begin{pmatrix}2\lambda_1 & \lambda_2+\lambda_4 & \lambda_3+\lambda_7\\ \lambda_2+\lambda_4 & 2\lambda_5 & \lambda_6+\lambda_8\\ \lambda_3+\lambda_7 & \lambda_6+\lambda_8 & 2\lambda_9\end{pmatrix}$$

$ve\ trM=0$ olduğundan dolayı

$$\lambda_1+\lambda_5+\lambda_9=0 \qquad \lambda_9=-(\lambda_1+\lambda_5)$$

$$0=M+M^t$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-\lambda_4,\quad \lambda_5=0,$$

$$\lambda_9=-\lambda_7,\quad \lambda_9=0,\quad \lambda_6=-\lambda_8.$$

O halde

$$M=\begin{pmatrix}0 & \lambda_2 & \lambda_3\\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_6\\ -\lambda_3 & -\lambda_6 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_6\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_2X_1+\lambda_3X_2+\lambda_6X_3$$

diyelim.

$SO(3)$ ün tabanı $\{X_1, X_2, X_3\}$

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -X_3$$

ve benzer işlemlerle;

$[X_3, X_1] = X_2$

$[X_2, X_3] = -X_1$

$[X_1, [X_2, X_3]] = [X_1, X_1] = 0$

$[X_2, [X_3, X_1]] = [X_2, X_2] = 0$

$[X_3, [X_1, X_2]] = [X_3, X_3] = 0$

$\{X_1, X_2, X_3\}$ bu uzayı germekte ve lineer bağımsız olup, dolayısıyla bunlar *SO(3)* grubunun uzayının bir tabanıdır ve boyutu *dim SO(3)=3* olarak bulunur.

Soru 25) $T = \begin{pmatrix} x & x^{-1}y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ matrisinin bir **ortogonal** matris olması için x ve y üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir?

Çözüm:

$T = \begin{pmatrix} x & x^{-1}y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ matrisinin **ortogonal** olması için $T^t T = I$ olmalıdır.

$$T^tT=\begin{pmatrix} x & 0 \\ x^{-1}y & x^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x^{-1}y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x^2 & y \\ y & x^{-1}x^{-1}\left(y^2+1\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O halde $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

ve $y=0$

elde edilir.

Soru 26)

$G=\left\{ A\in GL\left(2,R\right): A^tCA=C,\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi

bir gruptur.

a) Bu grubun teğet uzayını bulunuz.

b) Bu grubun Lie cebirini bulunuz.

Çözüm a)

$A(t)=\begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{bmatrix}$ $ve\ A^T(t)=\begin{bmatrix} a_1(t) & a_3(t) \\ a_2(t) & a_4(t) \end{bmatrix}$ olsun.

$A^T.C.A=C\ ve\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} a_1(t) & a_3(t) \\ a_2(t) & a_4(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

işlemini açarsak

$$\begin{bmatrix} a_1(t) & 0 \\ a_2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1^2(t) & a_1(t).a_2(t) \\ a_1(t)a_2(t) & a_2^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_1^2(t) = 1 \ ise \quad a_1(t) = \pm 1$

$a_2^2(t) = 0 \ ise \ \ a_2(t) = 0 \ olur$ ve

$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_3(t) & a_4(t) \end{bmatrix}$ alabiliriz.

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_3(0) & a_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_3(t) = c.t^n \ \ ve \ \ a_4(t) = dt^n + 1 \ seçilirse$

$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ct^n & dt^n + 1 \end{bmatrix} olur$

$A^{'}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c.n.t^{n-1} & d.n.t^{n-1} \end{bmatrix}$ olur.

$A(s) = (a_{ij}(\mathrm{s}))$ ve $A(0) = I$ olsun. $A^t CA = C$ ifadesini

s ye göre türevini alırsak;

$$\frac{d}{ds}[A^t(s)CA(s) - C]_{s=0} = 0,$$

$A^{t\prime}(s)CA(s) + A^t(s)CA'(s)_{s=0}$ =0

$M = m_{ij} = A(0) \Rightarrow M^tC + CM = 0$

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ alınırsa $m_{11} = 0$ ve m_{12} bulunur.

Buna göre;

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teğet uzay $\left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ şeklinde matrisleri elde ederiz.

b)

$[X, Y] = -X$

Bu Jacoby özdeşliğini sağlar.

Soru 27)

$$G = \left\{ A \in GL(3, R) : A^tCA = C,\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi bir gruptur. Bu grubun teğet uzayını ve dolayısıyla boyutunu bulunuz.

Çözüm:

Bu grubun teğet uzayını ve dolayısıyla boyutunu bulmak için: $A^{+}C\ A = C$ eşitliğin her tarafın türevini al; S parametresine göre

A(0)=I olup $A^{+}(0)$=I ve s=0 için

$$A = A(s)$$
$$A(0) = I$$
$$\frac{d}{ds}\left[A^{t}(s).C.A(s)\right]_{s=0} = \frac{d}{ds}C$$
$$\Rightarrow 0 = A^{t}(s).C.A(s) + A^{t}(s).C.A(s)$$

$$\Rightarrow A^{t\prime}(0).C.A(0) + A^{t}(0).C.A'(0) = 0$$
$$\Rightarrow A^{t\prime}(0).C.I + A^{t}(0).C.A'(0) = 0.$$

Ve buradan

$$\dot{A}(0) = M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix}$$

$\acute{A}^{+}(0) = M^{+}$ olduğundan, $M^{t}.C + CM$ elde edilir.

$$\dot{A}^{+}(s)CA + A^{+}(s)\left(C\ \dot{A}(s)\right)$$
$$= 0 \ \ ,\dot{A}^{+}(0)C + A^{+}(0)\left(C\ \dot{A}(0)\right) = 0$$
$$\to M^{+}.C + C.M = 0$$

ve

$$M^t.C+CM=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix} m_1 & m_7 & -m_4 \\ m_2 & m_8 & -m_5 \\ m_3 & m_9 & -m_6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_7 & -m_8 & -m_9 \\ m_4 & m_5 & m_6 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki matrisleri toplamına devam edersek:

$$\begin{pmatrix} 2m_1 & m_2+m_7 & m_3-m_4 \\ m_2-m_7 & 0 & -m_5-m_9 \\ m_3+m_4 & m_9+m_5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Buradan

$$2m_1=0 \Rightarrow m_1=0\,,\ \ m_2=-m_7\ ,m_7=0\ \ ,m_3=m_4\ ,m_2=0\ ,m_3=0=m_4$$

elde edilir.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_5 & m_6 \\ 0 & m_8 & -m_5 \end{pmatrix}$$

$$= m_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ m_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ohalde, bu grubun boyutu 3 dür.

Soru 28) Eğer R üzerinde $D_1 = \dfrac{d}{dx}$, $D_2 = x\dfrac{d}{dx}$ ve $D_3 = x^2\dfrac{d}{dx}$ ise, türevlenebilen bir f fonksiyonu için D_1, D_2 ve D_3 ün Lie parantezini bulunuz.

Çözüm:

Önce ikili çarpımları elde edelim:

$$D_1D_2 = \frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}) = \frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2}$$

$$D_1D_3 = \frac{d}{dx}(x^2\frac{d}{dx})$$

$$= \frac{dx^2}{dx}.\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2} = 2x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}$$

$$D_2D_3 = x\frac{d}{dx}(x^2\frac{d}{dx}) = x(2x\frac{d}{dx}) + x^3\frac{d^2}{dx^2}$$

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$$

$$= \frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d^2}{dx^2} = D_1 = \frac{d}{dx} \ ,$$

$$D_1D_2 = x\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = x\frac{d^2}{dx^2}$$

$$[D_1, D_3] = D_1D_3 - D_3D_1$$

$$= 2x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2} - x^2\frac{d^2}{dx^2} = 2D_2$$

$$[D_2, D_3] = D_2D_3 - D_3D_2$$

$$= 2x^2\frac{d}{dx} + x^3\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) - x^2\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx})$$

$$= 2x^2\frac{d}{dx} + x^3\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) - x^2\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) - x^3\frac{d^2}{dx^2}$$

$$= x^2\frac{d}{x} = D_3$$

$$[D_2, D_3] = D_2D_3 - D_3D_2$$

$$= 2x^2\frac{d}{dx} + x^3\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) - x^2\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx})$$

$$= 2x^2\frac{d}{dx} + x^3\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) - x^2\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) - x^3\frac{d^2}{dx^2}$$

$$= x^2\frac{d}{x} = D_3$$

elde edilir.

Soru 29)

$$X = y\partial_z - z\partial_y,\ Y = z\partial_x - x\partial_z,\ Z = x\partial_y - y\partial_x$$

operatörlerinin Lie parantezini bulunuz. (Burada

$\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial a}$ dır.)

Çözüm:

$$X = y\partial_z - z\partial_y;\ \ Y = z\partial_x - x\partial_z,\ \ Z = x\partial_y - y\partial_x$$

$$[X,Y] = \left(y\partial_z - z\partial_y\right)(z\partial_x - x\partial_z) - (z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y)$$

$$= (y\partial_x - 0 - 0 + 0) - (0 - 0 - 0 + x\partial_y)$$

$$= y\partial_x - x\partial_y = -Z$$

$$[X,Z] = (0 - 0 - 0 + z\partial_x) - (x\partial_z - 0 - 0 + 0) = Y$$

$$[Y,Z] = (z\partial_y - 0 - 0 + 0) - (0 - 0 - 0 + y\partial_z) = -X$$

elde edilir.

Soru 30) $SL(2,R)$ özel lineer grubunun teğet uzayını ve onun boyutunu bulunuz.

Çözüm:

$\dim\left[SL(2,R)\right]=3$ *old. göstere*lim.

$\dim(SL(2,R))=\dim(sl(2,R))$

$sl(2,\mathbb{R})$ *de* A matrisini ele alalım.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $sl(2,R)$ izi 0 olan matrislerin kümesidir.

$trA=0 \Rightarrow a+d=0$

$a=-d \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$\{X,Y,Z\}$, $sl(2,R)$ uzayını gerer ve

$\{X,Y,Z\}$ lineer bağımsızdır.

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=0$$

ise $a=b=c=0$ iken sağlanır.

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o halde X,Y,Z taban elemanıdır ve boyut 3 tür.

$$SL(2,\mathbb{R})=\left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid detA=1\right\}$$

$\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}$

$$\alpha(S)^{ij}=\begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \alpha_2(s) \\ \alpha_3(s) & \alpha_4(s) \end{pmatrix}=A$$

$$detA = \alpha_1(s).\alpha_4(s) - \alpha_2(s).\alpha_3(s) = 1$$

$$\frac{d}{ds}(detA) = \dot{\alpha}_1(s).\alpha_4(s) + \alpha_1(s).\dot{\alpha}_4(s) - \dot{\alpha}_2(s).\alpha_3(s)$$
$$- \alpha_2(s).\dot{\alpha}_3(s)$$

$$\alpha(0) = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(0) & \alpha_2(0) \\ \alpha_3(0) & \alpha_4(0) \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{d}{ds}(detA) = \dot{\alpha}_1(0) + \dot{\alpha}_2(0)$$

$$trA = \alpha_1(s) + \alpha_4(s)$$

$$\frac{d}{ds}(trA) = \dot{\alpha}_1(s) + \alpha_4(s)$$

$$\frac{d}{ds}(trA)\,\Big|_{s=0} = \dot{\alpha}_1(s) + \alpha_4(s)$$

$$\frac{d}{ds}(detA)\,\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(trA)\,\Big|_{s=0}$$

teğet uzayı belirleyen $trA = 0$ oldu.

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \,\Big|\, trA = 0\right\}$$

$\dim\big(SL(2,\mathbb{R})\big) = \dim(sl(2,\mathbb{R}))$ teğet uzayının boyutunu bulmak için grubun boyutunu bulmak yeterlidir.

$A \in SL(2,\mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $trA = 0$ olduğunu biliyoruz.

$$a + d = 0\,, a = -d$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ lineer bağımsızdır ve uzayı gerer.

$dimsl(2, \mathbb{R}) = 3 = SL(2, \mathbb{R})$dir.

Soru 31) $T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x^{-1}y & x^{-1} \end{pmatrix}$ matrisinin bir **ortogonal** matris olması için x ve y üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir?

Çözüm:

$T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x^{-1}y & x^{-1} \end{pmatrix}$ matrisinin **ortogonal** olması için $T^tT = I$ olmalıdır.

$$T^tT = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x^{-1}y & x^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x^{-1}y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 & y \\ y & x^{-1}x^{-1}\left(y^2+1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O halde $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

ve ve $y = 0$ elde edilir.

Soru 32) $T=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ matrisinin bir **üniter** matris olması için a, b ve c üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir?

Çözüm:

$T=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ matrisinin bir üniter matris olması için

$T^tT=I$ olup buradan a,b,c üç sayı ise

$$T^tT=\begin{pmatrix} \bar{a} & 1 \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{a}a+1 & \bar{a}b+c \\ \bar{b}a+\bar{c} & \bar{b}b+\bar{c}c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{a}a=0$

$\bar{a}b+c=0$

$\bar{b}a+\bar{c}=0$

$\bar{b}b+\bar{c}c=1$

$\Rightarrow a=0, c=0, b=1$

$T^tT=I$ şartı sağlanmış olup bir üniter matristir.

Soru 33)

$$G=\left\{A\in GL(3,R): A^{t}CA=C,\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

kümesi bir gruptur. Bu grubun **teğet uzayını** ve dolayısıyla **boyutunu** bulunuz.

Çözüm:

Okuyucuya bırakılmıştır.

Soru 34) Eğer R üzerinde

$$D_1=x\frac{d}{dx},\ D_2=6x\ \frac{d}{dx}\ \text{ve}\ D_3=7x^3\ \frac{d}{dx}\ \text{ise,}$$

türevlenebilen bir f fonksiyonu için $D_1,\ D_2$ ve D_3 ün Lie parantezini bulunuz.

Çözüm:

İkili ikili Lie parantezlerini bulalım:

$$
\begin{aligned}
[D_1, D_2](f) &= D_1\left[D_2[f]\right] - D_2\left[D_1[f]\right] \\
&= x\frac{d}{dx}\left[6x.\frac{df}{dx}\right] - 6x\frac{d}{dx}\left[x.\frac{df}{dx}\right] \\
&= x\left[\frac{d(6x)}{dx}\frac{df}{dx} + 6x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - 6x\left[\frac{d(x)}{dx}\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= x\left[6\frac{df}{dx} + 6x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - 6x\left[\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= 6x\frac{df}{dx} + 6x^2\frac{d^2 f}{dx^2} - 6x\frac{df}{dx} - 6x^2\frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde aşağıdaki Lie parantezlerini elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
[D_1, D_3](f) &= D_1\left[D_3[f]\right] - D_3\left[D_1[f]\right] \\
&= x\frac{d}{dx}\left[7x^3.\frac{df}{dx}\right] - 7x^3\frac{d}{dx}\left[x.\frac{df}{dx}\right] \\
&= x\left[\frac{d(7x^3)}{dx}\frac{df}{dx} + 7x^3\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - 7x^3\left[\frac{d(x)}{dx}\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= x\left[21x^2\frac{df}{dx} + 7x^3\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - 7x^3\left[\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= 21x^3\frac{df}{dx} + 7x^4\frac{d^2 f}{dx^2} - 7x^3\frac{df}{dx} - 7x^4\frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= 14x^3\frac{df}{dx} \\
&= 2D_3(f).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}[D_2, D_3](f) &= D_2\left[D_3[f]\right] - D_3\left[D_2[f]\right] \\ &= 6x\frac{d}{dx}\left(7x^3.\frac{df}{dx}\right) - 7x^3\frac{d}{dx}\left(6x.\frac{df}{dx}\right) \\ &= 6x\left[\frac{d(7x^3)}{dx}\frac{df}{dx} + 7x^3\frac{d^2f}{dx^2}\right] - 7x^3\left[\frac{d(6x)}{dx}\frac{df}{dx} + 6x\frac{d^2f}{dx^2}\right] \\ &= 6x\left[21x^2\frac{df}{dx} + 7x^3\frac{d^2f}{dx^2}\right] - 7x^3\left[6\frac{df}{dx} + 6x\frac{d^2f}{dx^2}\right] \\ &= 126x^3\frac{df}{dx} + 42x^4\frac{d^2f}{dx^2} - 42x^3\frac{df}{dx} - 42x^4\frac{d^2f}{dx^2} \\ &= 84x^3\frac{df}{dx} \\ &= 12.D_3(f)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Soru 35) Kabul edelim ki X ve Y lineer tasvirleri $q \neq 0$ olmak üzere $XY = qYX$ bağıntısını sağlayan ve eğer $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise λ ve μ sayılarını bulunuz.

Çözüm:

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$YX = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$XY = qYX$ ise $\lambda\mu = q\mu \Rightarrow \lambda = q,\ \mu = 0;$

1^o)Eğer $\mu \neq 0 \Rightarrow \lambda = q$

2^o)Eğer $\lambda \neq q \Rightarrow \mu = 0$ olarak buluruz.

Soru 36) $GL(2,R)$ grubunun

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile oluşturulmuş 1-parametreli alt grubunu bulunuz.

Çözüm:

Okuyucuya bırakılmıştır.

Soru 37) $A = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindeki matrislerin bir ortogonal grup oluşturması için x ve y üzerine hangi şart(lar) yüklenmelidir?

Çözüm:

Okuyucuya bırakılmıştır.

Soru 38)

$$G = \left\{ A \in GL(2,R) : \; A^t C A = C, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi bir gruptur. Bu grubun **teğet uzayını** bulunuz.

Çözüm:

$A(s)=(a_{ij}(s))$ *ve* $A(0)=\mathrm{I}$ *olsun*.

$$\frac{d}{ds}=\left(a_{ij}\left(s\right)\right)$$

ve

$A(0)=\mathrm{I}$ ise,

$$\frac{d}{ds}\left[A^{t}(s)CA(s)-C\right]_{S=0}=0$$

$$\left[A^{t}(0)C+CA(0)\right]'=0.$$

$$M=(m_{ij})=A(0)\Rightarrow M^{t}C+CM=0$$

$M\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ *alınırsa* $m_{11}=0,\ m_{12}=0, m_{21}=0$

bulunur. Yani,

$$M^{t}.C+CM=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buna göre,

$$M=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & m_{22}\end{pmatrix}=m_{22}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$ve\ teğet\ uzayı\left\{X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

şeklinde matrisler yazılırsa

$$[X,X]=0$$

Bu jacoby özdeşliğini sağlar.

$$A(t)=\begin{bmatrix}a_1(t) & a_2(t)\\ a_3(t) & a_4(t)\end{bmatrix} ve\ A^T=\begin{bmatrix}a_1(t) & a_3(t)\\ a_2(t) & a_4(t)\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{R})$$

ve

$$A^tCA=C,\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

ifadesinden,

$$\begin{bmatrix}a_1(t) & a_3(t)\\ a_2(t) & a_4(t)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_1(t) & a_2(t)\\ a_3(t) & a_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

işlemini açarsak

$$\begin{bmatrix}-a_1(t) & 0\\ -a_2(t) & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_1(t) & a_2(t)\\ a_3(t) & a_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1^2(t) & -a_1(t).a_2(t)\\ -a_1(t)a_2(t) & -a_2^2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$a_1^2(t)=1\ ise\ \ a_1(t)=\pm 1$$

$$a_2^2(t)=0\ ise\ \ a_2(t)=0 \text{ olur.}$$

$A(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_3(t) & a_4(t)\end{bmatrix}$ alabiliriz. O halde

$A(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_3(0) & a_4(0)\end{bmatrix}=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ olduğu için

$a_3(t)=c.t^n$ ve $a_4(t)=dt^n+1$ seçilirse

$A(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ ct^n & dt^n+1\end{bmatrix}$

ve

$$A^{'}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ c.n.t^{n-1} & d.n.t^{n-1}\end{bmatrix}.$$

Böylece teğet uzay $A'(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matrisi bulunur.

Soru 39) Eğer $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

ise, bir s reel sayısı için e^{sA} matrisini belirleyiniz ve $e^{sA}\in SO(2)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Bir s reel sayısı için e^{sA} matrisini bulalım:

$$e^{SA} = \frac{(SA)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,3.....$$

$$e^{SA} = 1 + \frac{SA}{1} + \frac{S^2.A^2}{2!} + \frac{S^3.A^3}{3!} + \frac{S^4.A^4}{4!} ... \frac{S^n.A^n}{n!}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

.

.

$$e^{SA} = 1 + \frac{S.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{1} + \frac{S^2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{2!} + \frac{S^3.\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{3!} + ... \frac{S^n A^n}{n!}$$

olur.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \quad \gamma(S)=e^{SA}$ olsun.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\mathrm{I}$$

$$A^3=A,\ A^4=\mathrm{I},\ A^5=A\ldots$$

$$e^{SA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{2k}}{(2k)!}A^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{2k+1}}{(2k+1)!}A$$

$$(\cosh s)\mathrm{I}+(\sinh s)A=\begin{pmatrix}e^s & 0\\ 0 & e^{-s}\end{pmatrix}$$

$$\gamma(s_1+s_2)=\begin{pmatrix}e^{s_1+s_2} & 0\\ 0 & e^{-s_1-s_2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{s_1} & 0\\ 0 & e^{-s_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{s_2} & 0\\ 0 & e^{-s_2}\end{pmatrix}=\gamma(s_1)\gamma(s_2)$$

$$\gamma'(s)=\begin{pmatrix}e^s & 0\\ 0 & -e^{-s}\end{pmatrix}\Rightarrow \gamma'(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A$$

O halde $e^{sA}\in SO(2)$ olur.

Soru 40) $SL(2)$ in tabanının Lie parantezini bulunuz.

Çözüm:

$SL(2)$ nin teğet uzayından faydalanacağız.

$SL(2)=\{M\in M_2(R):\ trM=0\}$.

$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ alalım.

$trM=0$ ise

$\alpha+\delta=0\ \alpha=-\delta$

olduğundan

$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

yazabiliriz.

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

kümesi verilen uzayı germektedir *ve*

lineer bağımsız olduklarından birer tabandır.

$x_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, x_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ olsun.

$$\left[x_1, x_2\right] = x_1x_2 - x_2x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x_1,$$

$$\left[x_2, x_3\right] = x_2x_3 - x_3x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = x_1,$$

$$\left[x_3, x_1\right] = x_3x_1 - x_1x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2x_3.$$

Soru 41) $SO(2)$ grubunun genel bir elemanını belirleyiniz.

Çözüm:

$SO(2)$ grubunun genel bir elemanını için;

$$A^t.A = \mathrm{I} \quad ve \ \det A = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ için$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$
$$c^2 + d^2 = 1$$
$$ac + bd = 0$$
$$ad - bc = 1$$

bağıntılarını verir. Bu sistemin bir çözümü

$a = \sqrt{1-b^2} \quad c = -b \quad = d = \sqrt{1-b^2}$ dir.

o halde bir $A \in SO(2)$ matrisi

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ -b & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir, eğer $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ve

$b = \sin\theta \ alırsak,$

$SO(2)$ grubunun genel bir elemanını

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

elde ederiz.

Soru 42) $\tau : M_n(C) \to M_n(C)$, tasvirinin $\tau(A) = A + A^t$, (A^t.A' nın transpozesini gösterir) lineer olup olmadığını bulunuz?

Çözüm:

$A,B \in \tau : M_n(C) \to M_n(C)$ olsun ve α skaler için:

$\tau(A+B) = \tau(A) + \tau(B)$ *ve*

$\tau(\alpha A) = \alpha\tau(a)$ *ise* $\tau(A)$ *lineerdir*

$$\tau(A+B) = A+B+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T$$
$$= A+B+A^T+B^T = \tau(A)+\tau(B)$$

$$\tau(\alpha A) = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha\left(A+A^T\right)$$

$\alpha\tau(A)$*olur yani* $\tau(A)$*lineerdir*

Soru 43)

$SL(2)$ grubunun teğet uzayını bulunuz.

Çözüm:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_3(t) & x_4(t) \end{pmatrix} \in SL(2) \Leftrightarrow \det\alpha(t) = 1$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\det\alpha(t)\right]|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left[x_1(t)x_4(t) - x_2(t)x_3(t)\right]|_{t=t_1}$$

$$= \left[\frac{dx_1}{dt}.x_4 + x_1.\frac{dx_4}{dt} - \frac{dx_2}{dt}x_3 - dx_2.\frac{dx_3}{dt}|_{t=t_0}\right].$$

$$Eğer\ \ \alpha(t_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ise$$

$$0=\frac{dx_1(t_0)}{dt}+\frac{dx_4(t_0)}{dt}\ olur\ \ yani$$

$$\frac{d}{dt}\left[\det\alpha(t)\,|_{t=t_0}=tr\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)|_{t=t_0}\right]=0\ dır$$

o halde $\alpha\left(\mathrm{t}_0\right)$ teğet vektörünün izi sıfırdır.

Tersine olarak, eğer *A*, izi sıfır olan herhangi bir matris ise,

$$\alpha\left(t\right)=I+tA$$

Eğrisi için

$$\begin{aligned}\det\alpha(t)&=\det(I+tA)\\ &=1+t\left(trA\right)+0\left(t^2\right)\\ &=1+0\left(t^2\right)\end{aligned}$$

bu doğru özdeşlikte hiper uzaya teğettir,

yani *A SL(2)* ye I da teğet olan uzaydadır ve sonuç olarak

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow d=-a\ \ \ olup$$

$$A \in M(2), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ ve } a,b,c \in A \text{için}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ için}$$

$$[H, X] = 2H, \quad [H, Y] = -X, \quad [X, Y] = 2Y$$

elde edilir.

Soru 44)

$SU(1,1)$ pseudo-üniter grubunun teğet uzayını ve dolayısıyla boyutunu bulunuz.

Çözüm:

$SU(1,1)$ pseudo-üniter grubunun teğet uzayını ve dolayısıyla boyutunu bulalım:

$$SU(1,1) = \left\{ A \in M_2(C) : A^{+}\mathrm{I}_{1,1} \; A = \mathrm{I}_{1,1}, \det A = 1 \right\}$$

$A \in SU(1,1)$ *ise*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{+} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}, \mathrm{I}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^{+}\mathrm{I}_{1,1}\ A=\mathrm{I}_{1,1} \qquad (*)$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, genel bir elemanıdır.

$\wp(S), SU(1,1)$ *in* teğet vektörü için

$\wp(S)=\begin{pmatrix} a(s) & b(s) \\ c(s) & d(s) \end{pmatrix}$ olsun.

(*) eşitliğinin türevini alırsak;

$$\frac{dA^{+}}{ds}\mathrm{I}_{1,1}A(s)+A^{+}.\mathrm{I}_{1,1}.\frac{dA}{ds}|_{s=0}=0$$

$A(0)=1\ A(0)=M$ alalım.

$A^{+}(0)\mathrm{I}_{1,1}+\mathrm{I}_{1,1}\ A(0)=0$

$M^{+}\mathrm{I}_{1,1}+\mathrm{I}_{1,1}\ M=0$

$trM=0\ ve\ M\begin{pmatrix} \lambda & M \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ alalım:

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda} & \overline{\nu} \\ \overline{M} & \overline{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & M \\ \nu & \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda}+\lambda & -\nu+M \\ \overline{M}-\nu & -\overline{\mu}-\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overline{\lambda}=-\lambda\ \ M=\overline{\nu}\ \ \overline{M}=\nu\ \ \overline{\mu}=-\mu$

$\Rightarrow \lambda_1-i\lambda_2=-\lambda_1-i\lambda_2$

$\lambda_1=0=\mu_1 \quad M_1+iM_2=\nu_1-i\nu_2$

$M_1-iM_2=\nu_1+i\nu \quad M_1=\nu_1 \qquad -M_2=+\nu_2$

$$M=\begin{pmatrix} i\lambda_2 & M_1+iM_2 \\ M_1-iM_2 & -i\lambda_2 \end{pmatrix} \quad trM=0 \quad \text{olduğundan,}$$

$$i\lambda_2+i\mu_2=0$$

$$M=\lambda_2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}+M_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+M_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

olup dim(SU(1,1))=3

$$\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

elde edilir.

Soru 45)

n=3 için $SO(3)$ uzayında bir küme $\{X_1, X_2, X_3\}$ olmak üzere

$$\left\{X_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

bu küme $SO(3)$ uzayının bir tabanı

olup, bu kümenin Lie cebirini gösteriniz.

Çözüm:

Önce ikili Lie parantezlerini bulalım:

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= X_3$$

$$\left[X_3, X_1\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= X_2$$

$$\left[X_2, X_3\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= X_1$$

elde edilir. $\forall X_1, X_2, X_3 \in SO(3)$ için,

$$[X_1, X_1] = 0$$
$$[X_2, X_2] = 0$$
$$[X_3, X_3] = 0$$

ve $\forall X_1, X_2, X_3 \in SO(3)$ için,

$$\left[X_1,[X_2,X_3]\right]+\left[X_2,[X_3,X_1]\right]+\left[X_3,[X_1,X_2]\right]$$
$$=[X_1,X_1]+[X_2,X_2]+[X_3,X_3]=0$$

olup bir Lie cebiri oluşturur.

Soru 46)

Eğer R üzerinde $D_1 = x\dfrac{d}{dx}$, $D_2 = 5x^2\dfrac{d}{dx}$, $D_3 = x^3\dfrac{d}{dx}$

ise türevlenebilen bir f fonksiyonu için D_1, D_2, D_3 ün Lie parantezini bulunuz.

Çözüm:

İkili ikili Lie parantezlerini bulalım:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](f) &= D_1\left[D_2[f]\right] - D_2\left[D_1[f]\right] \\
&= x\frac{d}{dx}\left[5x^2.\frac{df}{dx}\right] - 5x^2\frac{d}{dx}\left[x.\frac{df}{dx}\right] \\
&= x\left[\frac{d(5x^2)}{dx}\frac{df}{dx} + 5x^2\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - 5x^2\left[\frac{d(x)}{dx}\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= x\left[10x\frac{df}{dx} + 5x^2\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - 5x^2\left[\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= 10x^2\frac{df}{dx} + 5x^3\frac{d^2 f}{dx^2} - 5x^2\frac{df}{dx} - 5x^3\frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= 5x^2\frac{df}{dx} \\
&= D_2(f).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[D_1, D_3](f) &= D_1\left[D_3[f]\right] - D_3\left[D_1[f]\right] \\
&= x\frac{d}{dx}\left[x^3.\frac{df}{dx}\right] - x^3\frac{d}{dx}\left[x.\frac{df}{dx}\right] \\
&= x\left[\frac{d(x^3)}{dx}\frac{df}{dx} + x^3\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - x^3\left[\frac{d(x)}{dx}\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= x\left[3x^2\frac{df}{dx} + x^3\frac{d^2 f}{dx^2}\right] - x^3\left[\frac{df}{dx} + x\frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= 3x^3\frac{df}{dx} + x^4\frac{d^2 f}{dx^2} - x^3\frac{df}{dx} - x^4\frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= 2x^3\frac{df}{dx} \\
&= 2D_3(f).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[D_2, D_3\right](f) &= D_2\left[D_3[f]\right] - D_3\left[D_2[f]\right] \\
&= 5x^2 \frac{d}{dx}\left(x^3.\frac{df}{dx}\right) - x^3 \frac{d}{dx}\left(5x^2.\frac{df}{dx}\right) \\
&= 5x^2\left[\frac{d(x^3)}{dx}\frac{df}{dx} + x^3 \frac{d^2 f}{dx^2}\right] - x^3\left[\frac{d(5x^2)}{dx}\frac{df}{dx} + 5x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= 5x^2\left[3x^2 \frac{df}{dx} + x^3 \frac{d^2 f}{dx^2}\right] - x^3\left[10x\frac{df}{dx} + 5x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}\right] \\
&= 15x^4 \frac{df}{dx} + 5x^5 \frac{d^2 f}{dx^2} - 10x^4 \frac{df}{dx} - 5x^5 \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= 5x^4 \frac{df}{dx} \\
&= x^2.D_2(f)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Manin, Y.I., (1988). Quantum groups and noncommutative geometry, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC.

[2] Woronowicz, S.L., (1987). "Compact Matrix Pseudogroups", Comm. Math. Phys. 111-613.

[3] Celik, S., (2002). " Z_3 -Graded Differential Geometry of the Quantum Plane", J. Phys. A. Math. Gen., 35: 6307-6318.

[4] Abe, E., (1980). "Hopf algebras", Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Drinfeld, V. G., (1986). "Quantum groups", Amer. Math. Soc., 798–820.

[6] Connes, A., (1985). "Noncommutative differential geometry", Publ. Math. IHES, 62: 257-360.

[7] Woronowicz, S. L., (1989). "Differential calculus on compact matrix pseudogroups", Comm. Math. Phys., 122: 125-170.

[8] Curtis, M.L., (1984). " Matrix Groups'', Springer, London.

[9] Bulut F., (2020). “Matematikte Klasik Matris Gruplar”, Gece Kitaplığı, ISBN NO: 978-625-7177-93-1.

[10] Celik S., Bulut F., (2016). “A Differential Calculus on the Z_3-graded Quantum GLq(2) ”,, Advances in Applied Clifford Algebras 26 (1), 81-96.

[11] Celik, S., (1998). “Differential Geometry of the q-Superplane’’, J. Phys. A. Math. Gen., 31:9695-9701.

[12] Celik, S., (2006). “Cartan Calculi on the Quantum Superplane’’, Journal of Physics A: Mathematical and General, 47: 8.

[13] Bulut F, Celik S, (2017). “A Differential Calculus on Superspace $R_h(1/2)$ and Related Topics Advances in Applied Clifford Algebras’’, 27 (2): 1019-1030.

[14] Asar, AO, Arıkan A, Arıkan A, (2009).“Cebir’’, Eflatun yayınevi, Ankara.

[15] Celik, S, (2002). “ Differential Geometry of Z_3-Graded Quantum Super- plane’’, J. Phys. A: Math. Gen., 35: 4257-4268.

[16] Baker, A, (2002). “Matrix Groups, An introduction to Lie group theory’’, Springer, London.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatma BULUT

Doğum Yeri : ELAZIĞ

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : fbulut@beu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Tezli Y.Lisans	Matematik	Fırat Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Fırat Üniversitesi	2007
Lise	Sayısal	Elazığ Balakgazi Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2023-devam ediyor.	Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Bölümü	Doçent
2018-2022	Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Bölümü	Doktor Öğretim Üyesi
2011 - 2016	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2016 - 2018	Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Bölümü	Doktor Araştırma Görevlisi